Curso Propedéutico

ITCJ

Ciudad Juárez 2009

Autor: Francisco Cuevas-Machado.

Profesor de asignatura adscrito al Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez.

Mecanografía:
Francisco Cuevas-Machado

Dibujos:
Francisco Cuevas-Machado

Cd. Juárez, Enero 2009.
Academia Del Departamento De Ciencias Básicas. Instituto Tecnológico De Ciudad Juárez.

Al Estudiante:

Bienvenido(a). En el Instituto Tecnológico de Ciudad Juárez estamos muy contentos de tenerte como estudiante. Nuestro objetivo es ofrecerte cursos de alta calidad para que tu perfil profesional en el futuro sea excepcional.

Con este propósito en mente hemos desarrollado este curso–manual que tiene entre sus metas actualizarte y prepararte para otros cursos básicos los cuales son fundamentales en el conocimiento humano y sobre todo en tu carrera académica.

Sabemos y estamos conscientes del compromiso que tienes como estudiante hacia la sociedad, hacia tu institución educativa y sobre todo hacia tus padres y estamos seguros que todo tu esfuerzo será recompensado satisfactoriamente.

Por último solamente nos queda decirte: ¡Enhorabuena y adelante!

Departamento de Ciencias Básicas.
Academia de Matemáticas.

Índice general

Parte I

NÚMEROS REALES

Capítulo 1

Clasificación de los números reales

Los números reales constituyen el conjunto fundamental bajo el cual podemos obtener resultados cuantitativos en las disciplinas las ingenierías y ciencias afines.

Haciendo una clasificación de los números reales por medio de sus subconjuntos, tenemos lo siguiente:

Números naturales. Este es el primer conjunto, el de los *números naturales*, es decir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, y se lee: "$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números que van desde el uno hasta el infinito". Este conjunto también se conoce como el conjunto de los *números de contar*. Por convención, aquí, el conjunto de los números naturales comienza exactamente en el 1, en otras convenciones este conjunto puede comenzar en el 0.

Números enteros. Enseguida, el conjunto de los *números enteros*. Este conjunto incluye al conjunto de los números naturales, a los números negativos y al cero. Se representa como $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. En este caso, los puntos suspensivos en ambos lados indican que los enteros se recorren desde el infinito negativo hasta el infinito positivo.

Números racionales. Tenemos ahora al conjunto de los *números racionales*, que son todos los números que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros, siendo el denominador diferente de cero, esto es, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q};\, p, q \in Z \wedge q \neq 0^1\}$. Tomemos en cuenta que las expresiones $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{8}$ representan, ambas, dos expresiones diferentes de números enteros, sin embargo, sabemos que representan el *mismo* número racional.

Números irracionales. El conjunto de los *números irracionales* son el complemento de los números racionales, esto es, si un número racional se puede escribir como un cociente de dos enteros $\frac{p}{q}$ con el denominador diferente de cero, $q \neq 0$, entonces un número irracional

[1]**División por cero.** De acuerdo con la forma que tienen los números racionales, cualesquier número se puede escribir como el cociente de dos números enteros, $\frac{p}{q}$ donde *necesariamente* $q \neq 0$. Siendo esto así, ¿que sucede con la división por cero? Tenemos los casos: a) la división cero entre cero, 0/0, de acuerdo con el algoritmo de la división, el resultado de esta división es *cualquier* número, y b) la división uno entre cero, 1/0, por el mismo algoritmo, *no existe* un resultado de dividir uno entre cero.

no se puede escribir como cociente de dos números enteros. Se representa como $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{Q}}$.

Números reales. Finalmente, diremos que el conjunto de los *números reales*, es la unión del conjunto de los números racionales y el de los números irracionales, esto es, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

La recta real. Si nos damos a la tarea de representar gráficamente a los números reales, lo haríamos de la siguiente forma: Primero dibujamos todos los números naturales, esto es, ponemos una secuencia de puntos igualmente espaciados, empezando por un lugar arbitrario para especificar el uno y recorriendo el espacio designado hacia la derecha, los puntos que representan a los naturales consecutivos.

Enseguida, en la misma secuencia de puntos, pero en sentido contrario dibujamos al cero y a los negativos igualmente espaciados. Ahora, dibujamos en medio de cada par de puntos enteros a los medios, después a los cuartos, a los octavos, etc. Al finalizar este proceso, encontramos que tenemos una linea casi "solida", sólo que en realidad no esta completamente sólida, tiene huecos de parte en parte, para llenar esos huecos, necesitamos "insertarle" los números que llamamos irracionales, entonces tendremos lo que se conoce como *recta de números reales*.

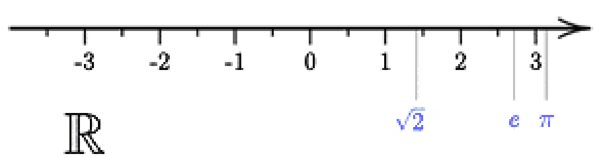

Figura 1.1: La recta real

Capítulo 2

Propiedades de los números reales

Un *campo* es un conjunto $\mathbb{F}$ con dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación* que satisfacen los llamados *axiomas de campo*. El conjunto de los números reales forman un campo.

1. Cerradura. Si $x \in \mathbb{F}$ e $y \in \mathbb{F}$, entonces su suma $x + y$ está en $\mathbb{F}$.
2. Conmutatividad. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathbb{F}$.
3. Asociatividad. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.
4. Elemento neutro. $\mathbb{F}$ contiene un elemento, 0 tal que $0 + x = x$ para cada $x \in \mathbb{F}$.
5. Inverso aditivo. Para cada $x \in F$ corresponde un elemento $-x \in \mathbb{F}$ tal que $x+(-x) = 0$.
6. Cerradura. Si $x \in \mathbb{F}$ e $y \in \mathbb{F}$, entonces su producto xy está en $\mathbb{F}$.
7. Conmutatividad. $xy = yx$ para todo $x, y \in \mathbb{F}$.
8. Asociatividad. $(xy)z = x(yz)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.
9. Distributividad. x(y + z) = xy + xz para todo $x, y, z \in \mathbb{F}$.
10. Elemento neutro. F contiene un elemento, $1 \neq 0$ tal que $1x = x$ para cada $x \in \mathbb{F}$.
11. Inverso multiplicativo. Si $x \in \mathbb{F}$ y $x \neq 0$ entonces existe un elemento $\frac{1}{x} \in \mathbb{F}$ tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

Parte II

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA

El Álgebra constituye una herramienta muy útil en los problemas contextuales tanto en la vida cotidiana, como en problemas específicos de las diversas áreas de la ingeniería. Dada su importancia, en el siguiente trabajo se aborda cada tema con un previo contexto relacionado con algunos conceptos básicos del Álgebra.

Capítulo 3

Operaciones con expresiones algebraicas

Las operaciones fundamentales aritméticas y las algebraicas son las mismas, nos referimos a la suma, resta, producto y división. La potenciación y radicación son muy usadas.

3.1. Definición de expresión algebraica

Una expresión algebraica es aquella en que intervienen cantidades *constantes* y *variables*, en donde las cantidades constantes se representan por los números reales o las primeras letras del alfabeto a, b y c y las cantidades variables se representan por las últimas letras del alfabeto x, y y z.

EJEMPLO 3.1. *Identificar las partes que componen la expresión* $-5x^2$.

Solución. Las partes que componen una expresión algebraica son:

- Signo. El signo de una expresión algebraica es el que se encuentra inmediatamente a su izquierda, puede ser positivo o negativo, el signo negativo se hace explícito siempre.
- Coeficiente. El coeficiente de una expresión algebraica es la cantidad constante que multiplica a la variable.
- Variable. La variable de una expresión algebraica es la cantidad que toma valores arbitrarios.
- Exponente. El exponente de una expresión algebraica es valor constante o variable al que está elevado la variable.

■

Enseguida veremos la necesidad del uso de variables. Enunciados como los siguientes:

Geometría. El área de un círculo es el producto del número π por el cuadrado de su radio.

Geometría. El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de su lado.

Física. El peso de un objeto es igual al producto de la masa por la constante de gravedad.

Nos hacen ver la necesidad de utilizar lo que conocemos como cantidades variables y constantes, con las cuales generamos las expresiones algebraicas utilizadas en todas las áreas del conocimiento, no sólo de las matemáticas.

EJEMPLO 3.2. *Traduzca los enunciados anteriores a una expresión algebraica. Asegúrese de identificar el significado de todos los símbolos.*

Solución.

a) área del círculo $= \pi \cdot r^2$.
   - π es una constante,
   - r es la variable que representa el radio,
   - 2 es el exponente.

b) área del cuadrado $= l^2$.
   - l es la variable que representa el lado,
   - 2 es el exponente.

c) peso de un objeto $= m \cdot g$.
   - m es una variable que representa la masa de un objeto,
   - g es la constante de gravedad.

■

Con las cantidades algebraicas representadas por literales, pueden hacerse las mismas operaciones que con los números. En donde las operaciones fundamentales aritméticas y algebraicas son las mismas, nos referimos a la suma, resta, multiplicación y división. Como la representación de cantidades por medio de símbolos o literales suele ofrecer dificultades a los alumnos, veremos a continuación más ejemplos.

EJEMPLO 3.3. *Compré 3 libros a \$$a$ cada uno, 6 sombreros a \$$b$ cada uno y m trajes a \$$x$ cada uno. ¿Cuánto he gastado?*

Solución.
en 3 libros a \$$a$, gasté \$$3a$
en 6 sombreros a \$$b$, gasté \$$6b$
en m trajes a \$$x$, gasté \$$mx$

luego, el gasto total ha sido: $\$3a + \$6b + \$mx$, y como estamos hablando de que en las tres cantidades existe la unidad de dinero, lo podemos escribir como sigue:

$$\$(3a + 6b + mx).$$

■

EJEMPLO 3.4. *Un hombre tenía* $\$a$*, después recibió* $\$8$ *y después pagó una cuenta de* $\$c$*. ¿Cuánto le queda?*

Solución. Teniendo $\$a$ recibió $\$8$, luego tenía $\$(a+8)$. Si entonces gasta $\$c$ entonces lo que le queda es $\$(a+8) - \$c$, y como en el inciso anterior, las unidades son dinero, entonces:

$$\$(a+8-c).$$

∎

EJEMPLO 3.5. *Compro* x *libros iguales por* $\$m$*, ¿cuánto me ha costado cada uno?*

Solución. Como voy a comprar varios libros por una cantidad de dinero, entonces se trata de un problema de repartición, es decir, vamos a dividir la cantidad de dinero gastada entre el número de libros comprados, entonces cada libro cuesta

$$\$\left(\frac{m}{x}\right).$$

∎

Ejercicios. Traduce los siguientes problemas a una expresión algebraica.

1. Siendo z un número entero, escribir los dos números enteros consecutivos posteriores a z.
2. Siendo b un número entero par, escribir los tres números pares consecutivos posteriores a b.
3. Escribir la diferencia entre m y n.
4. De una jornada de x km, ya se han recorrido m km. ¿cuánto me falta por andar?
5. Al vender una casa en $\$m$, gané $\$300$. ¿Cuánto me costó la casa?
6. Expresar la superficie de una sala rectangular que mide a metros de largo y b metros de ancho.
7. Escribir el producto de $(a+b)$ por $(x+y)$.
8. Compro $(a-8)$ caballos a $\$(x+4)$ dólares cada uno. ¿Cuál fue el total de la compra?
9. Se compran $(n-1)$ caballos por $\$3000$ dólares. ¿Cuánto cuesta cada caballo?
10. En el piso bajo de un hotel hay x habitaciones. En el segundo piso hay el doble del número de habitaciones que en el primero, en el tercero, la mitad de las que hay en el primero. ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel, si solamente tiene tres pisos?

3.2. Suma y resta de polinomios

En los ejercicios anteriores hemos mezclado expresiones algebraicas (monomios) con las operaciones fundamentales suma, resta, producto y división, al hacer esto generamos lo que conocemos como polinomios.

Polinomio es una expresión algebraica que consta de más de un término, por ejemplo: a) $m - n$, b) $2a + 2b$, c) $x^2 + 5x - 6$.

Como caso particular si la expresión algebraica consta de un sólo término, como $3a$, $\frac{x}{2y}$, $-5b$ se les denomina monomios que quiere decir un solo término.

DEFINICIÓN 3.1. *La* ***suma*** *es una operación algebraica, que tiene por objeto sumar o adicionar dos cantidades que constan de varios términos o cantidades polinómicas llamdos sumandos en una sola expresión algebraica que se denomina suma.*

DEFINICIÓN 3.2. *La* ***resta*** *o* ***diferencia****, por su parte, es una operación algebraica, que tiene por objeto, dadas dos cantidades denominadas minuendo y sustraendo, efectuar la diferencia, es decir, restar al minuendo el sustraendo y así obtener la resta.*

Dos monomios ax^k y bx^k del mismo grado y con la misma variable son conocidos como *términos semejantes*. Al sumar o restar estos términos semejantes, los podemos combinar en un único monomio mediante la propiedad distributiva.

EJEMPLO 3.6. *Sumar* $2x^2$ *con* $5x^2$.

Solución. Escribimos los monomios unidos con el signo más, y queda

$$2x^2 + 5x^2,$$

y por tener a x^2 como factor común, efectuamos la suma de sus coeficientes, es decir,

$$(2 + 5)x^2$$

que finalmente nos da como resultado

$$7x^2.$$

■

EJEMPLO 3.7. *De* $8x^3$ *restar* $5x^3$.

Solución. Otra vez, escribimos los monomios, pero en esta ocasión, los unimos con el signo menos, donde la primer cantidad es el minuendo y la segunda es el sustraendo, tenemos

$$8x^3 - 5x^3$$

y expresamos la diferencia de sus coeficientes,

$$(8 - 5)x^3$$

donde al efectuarla tenemos

$$3x^3.$$

■

EJEMPLO 3.8. *Si una persona tiene* 45 *dólares y* 350 *pesos, despues recibe de un familiar* 80 *pesos y* 60 *dólares, ¿cuánto dinero en tiene en total?*

Solución. Debemos de observar que podemos efectuar dos sumas parciales, ¿cuál es la razón? Bueno, sucede que no se pueden sumar pesos y dólares, pero dólares si se pueden sumar con dólares, lo mismo sucede con los pesos, de forma que podremos efectuar la suma de la siguiente forma, en símbolos

$$45 \; \textit{dólares y} \; 350 \; \textit{pesos} \;, 80 \; \textit{pesos y} \; 60 \; \textit{dólares}$$

cambiamos las palabras dólares por "d", y pesos por "p" y escribimos la expresión con unidades

$$(45d + 350p) + (80p + 60d)$$

y el resultado es, precisamente

$$105d + 430p.$$

■

EJEMPLO 3.9. *Si una persona tiene* 45 *dólares en monedas y* 35 *dólares en billetes, y al revisar una bolsa de su pantalón se encuentra con* 60 *dólares en billetes y* 18 *dólares en monedas, ¿cuánto dinero tiene en total?*

Solución. Debemos de observar que ahora sí podemos efectuar todas las sumas, ¿por qué ahora si? Bueno, ahora tenemos que todas cantidades están en dólares aunque tengamos billetes y monedas, por lo que hacemos lo siguiente. En símbolos

$$45 \; \textit{dólares y} \; 35 \; \textit{dólares}, \; 60 \; \textit{dólares y} \; 18 \; \textit{dólares}$$

recurrimos al truco anterior y escribimos

$$(45d + 35d) + (60d + 18d)$$

que el resultado es, precisamente

$$80d + 78d = 158d \quad \textit{ó} \quad 158 \; \textit{dólares.}$$

■

EJEMPLO 3.10. *Sumar* $(8x^3 - 2x^2 + 6x - 2)$ *con* $(3x^4 - 2x^3 + x^2 + x)$

Solución. Recordemos que la idea aquí es agrupar términos semejantes, es decir, tenemos que hacer la suma de los coeficientes de los términos semejantes, entonces de

$$(8x^3 - 2x^2 + 6x - 2) + (3x^4 - 2x^3 + x^2 + x)$$

asociando términos semejantes

$$3x^4 + (8 - 2)x^3 + (-2 + 1)x^2 + (6 + 1)x - 2$$

y tenemos como resultado

$$3x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 2.$$

■

EJEMPLO 3.11. *Pedro y Juan son vendedores de peras y naranjas, si Pedro tiene* 45 *kg de peras y vende* 18 *kg de naranjas, y Juan tiene* 60 *kg de naranjas y vende* 20 *kg de peras, ¿cuántos kg les quedan en total?*

Solución. En este problema podemos efectuar la resta de la siguiente forma, puesto que ambos vendedores tienen peras y naranjas, efectuamos la resta de peras con peras y de naranjas con naranjas, es decir 45 kg de peras menos 18 kg de naranjas y 60 kg de naranjas menos 20 kg de peras, lo podemos escribir, como en el primer ejemplo, con símbolos, esto es

$$(45kgp - 18kgn) + (60kgn - 20kgp)$$

y para efectuar la resta solo podemos hacerlo peras con peras y naranjas con naranjas

$$(45kgp - 20kgp) + (60kgn - 18kgn)$$

que restados nos queda en

$$42kgn + 25kgp$$

que nos dice que quedan 25kgp o 25 kg de peras y 42 kgn o 42 kg de naranjas.

■

EJEMPLO 3.12. *Pedro y Juan son vendedores de naranjas, Pedro tiene* 60 *kg de naranjas y vende* 18 *kg de naranjas, y de lo que le quedó, Juan vendió* 18 *kg de naranjas y después vendió* 12 *kg de naranjas, ¿cuántos kg les quedan en total?*

Solución. A la cantidad inicial que tenía Pedro, le vamos a restar lo que vendió, y de lo que le quedó, le vamos a restar lo que vendió Juan, es decir, 60 kg de naranjas menos 18 kg de naranjas y 18 kg de naranjas menos 12 kg de naranjas, lo podemos escribir, como en el ejemplo anterior, con símbolos, esto es

$$(60kgn - 18kgn) + (-18kgn - 12kgn)$$

que nos indica la resta del minuendo menos el sustraendo. Y el resultado es

$$42kgn + (-30kgn)$$

aplicando la ley de los signos

$$42kgn - 30kgn = 12kgn$$

es decir, que le quedan 12 kgn o, 12 kilogramos de naranjas.

■

EJEMPLO 3.13. *De* $4x + 3y + z$ *restar* $2x - 5z - 6$.

Solución. Para efectuar esta operación tenemos que disponer los polinomios en forma de columna, es decir, primero colocamos el minuendo y debajo el sustraendo, y entonces, término a término, restamos los coeficientes de las literales correspondientes

$$\begin{array}{rrrr}
4x & +3y & +z & \\
-(2x & & -5z & -6) \\
\hline
2x & +3y & +6z & +6
\end{array}$$

y entonces el resultado es

$$2x + 3y + 6z + 6.$$

∎

EJEMPLO 3.14. *Restar* $4a^5b - ab^5 - 6a^3b^3 - a^2b^4 - 3b^6$ de $8a^4b^2 + a^6 - 4a^2b^4 + 6ab^5$.

Solución. Para efectuar esta operación tenemos que disponer los polinomios en forma de columna, en este caso, colocaremos primero el segundo polinomio (que es el minuendo) y debajo de él el primer polinomio (que es el sustraendo), y entonces, término a término, restamos los coeficientes de cada literal

$$\begin{array}{ccccccc}
a^6 & & +8a^4b^2 & & -4a^2b^4 & +6ab^5 & \\
-(& +4a^5b & & -6a^3b^3 & -a^2b^4 & -ab^5 & -3b^6) \\
\hline
a^6 & -4a^5b & +8a^4b^2 & +6a^3b^3 & -3a^2b^4 & +7ab^5 & +3b^6
\end{array}$$

y entonces el resultado es

$$a^6 - 4a^5b + 8a^4b^2 + 6a^3b^3 - 3a^2b^4 + 7ab^5 + 3b^6.$$

∎

1. Ejercicios: Hallar la suma de las siguientes expresiones algebraicas.
   - *a*) $3a + 2b - c, 2a + 3b + c.$
   - *b*) $7a - 4b + 5c, -7a + 4b - 6c.$
   - *c*) $m + n - p, -m - n + p.$
   - *d*) $9x - 3y + 5, -x - y + 4, -5x + 4y - 9.$
   - *e*) $a + b - c, 2a + 2b - 2c, -3a - b + 3c.$
   - *f*) $p + q + r, -2p - 6q + 3r, p + 5q - 8r.$
   - *g*) $-7x - 4y + 6z, 10x - 20y - 8z, -5x + 24y + 2z.$
   - *h*) $-2m + 3n - 6, 3m - 8n + 8, -5m + n - 10.$
   - *i*) $-5a - 2b - 3c, 7a - 3b + 5c, -8a + 5b - 3c.$
   - *j*) $ab + bc + cd, -8ab - 3bc - 3cd, 5ab + 2bc + 2cd$
2. Ejercicios: Hallar la resta de las siguientes expresiones algebraicas, en los siguientes ejercicios, de la primer cantidad, restar la segunda.
   - *a*) $a + b, a - b.$
   - *b*) $8a + b, -3a + 4.$
   - *c*) $a^3 - a^2b, 7a^2b + 9ab^2.$
   - *d*) $x + y - z, -x - y + z.$
   - *e*) $x^3 - x^2 + 6, 5x^2 - 4x + 6.$
   - *f*) $2x - 3y, -x + 2y.$
   - *g*) $x^2 - 3x, -5x + 6.$
   - *h*) $x - y + z, x - y + z.$
   - *i*) $x^2 + y^2 - 3xy, -y^2 + 3x^2 - 4xy.$
   - *j*) $y^2 + 6y^3 - 8, 2y^4 - 3y^2 + 6y.$
3. Ejercicios: En los siguientes ejercicios, de la segunda restar la primer cantidad.
   - *a*) $a - b, b - a.$
   - *b*) $-5a + b, -7a + 5.$
   - *c*) $x^3 - xy^2, x^2y + 5xy^2.$
   - *d*) $a - b + 2c, -a + 2b - 3c.$
   - *e*) $-x + y - z, x + 3y - 6z.$
   - *f*) $x - y, 2x + 3y.$
   - *g*) $x^2 - 5x, -x^2 + 6.$
   - *h*) $6a^2b - 8a^3, 7a^2b + 5ab^2.$
   - *i*) $m - n + p, -3n + 4m + 5p.$
   - *j*) $3a^2 + ab - 6b^2, -5b^2 + 8ab + a^2.$

3.3. Multiplicación y división de polinomios

Antes de entrar en el tema de multiplicación y división de polinomios, hagamos un breve repaso sobre algunas reglas que utilizaremos con frecuencia.

Signos de agrupación. Los signos de agrupación más utilizados son: paréntesis ( ), corchetes [ ] y las llaves { }.

> Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como un todo, o sea, como una sola cantidad.

Regla general para suprimir signos de agrupación:

1. Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo más, se deja el mismo signo que tengan a cada uno de los términos que se hallan dentro de él.
2. Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo menos, se cambia el signo a cada uno de los términos que se hallan dentro de él.

EJEMPLO 3.15. *Suprimir los signos de agrupación de las siguientes expresiones.*

a) $a + (b - c) + 2a - (a + b)$

b) $5x + (-x - y) - [-y + 4x] + \{x - 6\}$

Solución. Para resolver el inciso a), primero, escribimos la expresión

$$a + (b - c) + 2a - (a + b)$$

en el primer signo de agrupación aplicamos la regla 1, es decir mantenemos los signos de cada término del binomio que está adentro, y para el segundo signo de agrupación, aplicamos la regla 2, es decir, cambiamos los signos de cada término, y tenemos

$$a + b - c + 2a - a - b$$

reducimos los términos semejantes y queda

$$2a - c.$$

Ahora bien, para resolver el segundo ejemplo, (inciso b) escribimos la expresión

$$5x + (-x - y) - [-y + 4x] + x - 6$$

y volviendo a aplicar las reglas 1 y 2, tenemos

$$5x - x - y + y - 4x + x - 6$$

y al reducir, queda

$$x - 6.$$

■

1. Ejercicios. Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes.

   a) $2m - [(m - n) - (m + n)]$
   b) $2x + [-5x - (-2y + \{-x + y\})]$
   c) $2a - (-4a + b) - [-\{-4a + (b - a) - (-b + a)\}]$
   d) $-[x + \{-(x + y) - [-x + (y - z) - (-x + y)] - y\}]$
   e) $4x^2 - [-(x^2 - xy) + (-3y^2 + 2xy) - (-3x^2 + y^2)]$

3.4. Ley de los signos

Signo de

1. El producto de dos factores.

   a) De signos iguales es positivo. $(+)(+) = (+)$, $(-)(-) = (+)$
   b) De signos diferentes es negativo. $(-)(+) = (-)$, $(+)(-) = (-)$

2. El cociente de dos factores.

   a) De signos iguales es positivo. $(+)/(+) = (+)$, $(-)/(-) = (+)$
   b) De signos diferentes es negativo. $(-)/(+) = (-)$, $(+)/(-) = (-)$

3.5. Leyes de los exponentes y radicales

Multiplicación. Para multiplicar potencias de la misma base, se escribe la misma base y se pone como exponente la suma de los exponentes de cada factor. Así, $a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 = a^{4+3+2} = a^9$.

División. Para dividir potencias de la misma base, se deja la misma base y el exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor. Así, $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$.

Propiedades de los exponentes.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m/a^n = a^{m-n}, a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
6. $(ab)^n = a^n b^n$
7. $a^0 = 1$

Propiedades de los radicales

1. $\sqrt[n]{a^n} = a$
2. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
5. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$

Ejercicios. Simplifica las siguientes cantidades usando las propiedades de los exponentes y radicales.

1. $\left(\frac{2a^2c^3}{15b^4}\right)^3 \left(\frac{30b^6}{4a^2c^2}\right)^3$.
2. $\frac{(b^2a^3t)^4}{(bat)^2(ba^2t)^3}$.
3. $\frac{(c^3o^2w)^5}{(c^2ow^3)^2(c^3o^3w^2)^3}$.
4. $\frac{(x^{2n-3}y^{n-2})^3}{x^{n-8}y^{3n-7}}$.
5. $\frac{(x^{2n-3}c^{2n+3})^2}{b^{6n}c^6}$.

3.6. Multiplicación de polinomios

> La multiplicación es una operación algebraica que tiene por objeto, dadas dos expresiones algebraicas, llamadas factores, hallar una tercera cantidad o producto.

EJEMPLO 3.16. *Un granjero dispone de un terreno rectangular, para construir jaulas, si un lado del terreno mide 5 metros con 6 yardas, y el otro lado mide 12 pies con 200 pulgadas, ¿cuál será el área del terreno?*

Figura 3.1: Terreno

Solución. Si ponemos un esquema del terreno, se verá como en la Figura (3.1). En este caso, los lados están medidos en unidades diferentes, (metros con yardas y pies con pulgadas). No hay que realizar la conversión entre unidades, basta solamente efectuar el producto de los lados, (y con sus unidades respectivas) ya que estar hablando de encontrar el área, es efectuar el producto o multiplicación de la medida de cada lado del terreno, en este caso, tenemos que hacer lo siguiente. Ya que el área de un rectángulo es base por altura, entonces, bh, es

$$(5m + 6y)(12f + 200p) = 60mf + 1000mp + 72fy + 1200py.$$

■

Ahora bien, no siempre es práctico o fácil obtener el esquema que nos represente el producto a efectuar. En este caso apliquemos la regla para multiplicar dos polinomios.

Regla para multiplicar polinomios.

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos y reduciendo los términos semejantes.

EJEMPLO 3.17. *Multiplicar el polinomio* $(5m + 6y)$ *con el polinomio* $(12f + 200p)$.

Solución. Con el término $5m$, multiplicamos a $(12f + 200p)$ que tendremos como resultado

$$(60mf + 1000mp)$$

y a continuación multiplicamos con el término $6y$, la expresión

$$(12f + 200p)$$

otra vez, y tenemos

$$(72fy + 1200py)$$

finalmente tenemos que sumar los dos productos obtenidos, y formar

$$(60mf + 1000mp) + (72fy + 1200py)$$

que suprimiendo los signos de agrupación, queda

$$60mf + 1000mp + 72fy + 1200py$$

Siendo esta expresión la obtenida anteriormente al sumar cada área de los rectángulos separados en la Figura (3.1).

■

1. Ejercicios. Hallar la multiplicación de las siguientes expresiones algebraicas.

   a) $a + 3$ por $a - 1$.
   b) $a - 3$ por $a + 1$.
   c) $x + 5$ por $x - 4$.
   d) $m - 6$ por $m - 5$.
   e) $-x + 3$ por $-x + 5$.
   f) $-a - 2$ por $-a - 3$.

g) $3x - 2y$ por $y + 2x$.

h) $-4y + 5x$ por $-3x + 2y$.

i) $5a - 7b$ por $a + 3b$.

j) $7x - 3$ por $4 + 2x$.

k) $-a + b$ por $-4b + 8a$.

l) $6m - 5n$ por $-n + m$.

m) $8n - 9m$ por $4n + 6m$.

n) $-7y - 3$ por $-11 + 2y$.

ñ) $x^2 + xy + y^2$ por $x - y$.

o) $a^2 + b^2 - 2ab$ por $a - b$.

p) $x^3 - 3x^2 + 1$ por $x + 3$.

q) $a^3 - a + a^2$ por $a - 1$.

r) $m^4 + m^2 + m - 2$ por $am + a$.

s) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ por $2x + 3$.

3.7. División de polinomios

La división es una operación algebraica que tiene por objeto, dadas dos expresiones algebraicas denominadas dividendo y divisor, hallar una tercera cantidad denominada cociente.

Regla para dividir dos polinomios.

- Se ordena el dividendo y el divisor con relación a una misma letra.
- Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y tendremos el primer término del cociente.
- Éste primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, escribiendo cada término debajo de su semejante. Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.
- Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente.
- Este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo.
- Se divide el primer término del segundo resto entre el primero del divisor y se efectúan las operaciones anteriores; y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero o que el residuo sea de grado menor que el máximo exponente del divisor.
- Si el residuo es cero la división es exacta y su resultado es el cociente, si no, se origina un cociente mixto, llamado así por que consta de una parte entera y una parte fraccionaria. Esto es, el resultado será el entero mas la fracción que se forma poniendo por numerador al residuo y denominador al divisor.

EJEMPLO 3.18. *Dividir* $(x^2 - x - 6)$ *entre* $(x + 3)$

Solución. Por el método de la “casita”, tenemos

$$\begin{array}{r|l} & x-4 \\ \hline x+3 & x^2 - x - 6 \\ & \underline{-x^2 - 3x} \\ & \quad -4x - 6 \\ & \quad \underline{4x + 12} \\ & \qquad\quad 6 \end{array}$$

Figura 3.2: División con residuo

entonces, el resultado es $x - 4 + \frac{6}{x+3}$

∎

EJEMPLO 3.19. *Un cubo tiene por volumen, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, y se desea saber cual es el área de una de sus caras, ¿cuál será ésta, si sabemos que una arista mide $a + b$?*

Solución. Otra vez, la división se realizará por el método de la casita

$$
\begin{array}{r|llll}
 & a^2 & +2ab & +b^2 & \\ \hline
a+b & a^3 & +3a^2b & +3ab^2 & +b^3 \\
 & -a^3 & -a^2b & & \\ \cline{2-3}
 & & +2a^2b & +3ab^2 & \\
 & & -2a^2b & -2ab^2 & \\ \cline{3-4}
 & & & +ab^2 & +b^3 \\
 & & & -ab^2 & -b^3 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

Figura 3.3: División exacta

es decir, que el área de una de las caras del cubo es $a^2 + 2ab + b^2$.

∎

1. Ejercicios: Hallar la división de las siguientes expresiones algebraicas.

   a) $a^2 + 2a - 3$ entre $a + 3$.
   b) $a^2 - 2a - 3$ entre $a + 1$.
   c) $x^2 - 20 + x$ entre $x + 5$.
   d) $m^2 - 11m + 30$ entre $m - 6$.
   e) $x^2 + 15 - 8x$ entre $3 - x$.
   f) $6 + a^2 + 5a$ entre $a + 2$.
   g) $6x^2 - xy - 2y^2$ entre $y + 2x$.
   h) $-15x^2 - 8y^2 + 22xy$ entre $2y - 3x$.
   i) $5a^2 + 8ab - 21b^2$ entre $a + 3b$.
   j) $14x^2 - 12 + 22x$ entre $7x - 3$.
   k) $-8a^2 + 12ab - 4b^2$ entre $b - a$.
   l) $5n^2 - 11mn + 6m^2$ entre $m - n$.
   m) $32n^2 - 54m^2 + 12mn$ entre $8n - 9m$.
   n) $-14y^2 + 33 + 71y$ entre $-3 - 7y$.
   ñ) $x^3 - y^3$ entre $x - y$.
   o) $a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3$ entre $a - b$.
   p) $x^4 - 9x^2 + 3 + x$ entre $x + 3$.
   q) $a^4 + a$ entre $a + 1$.
   r) $m^6 - n^6$ entre $m^2 - n^2$.

s) $2x^4 - x^3 - 3 + 7x$ entre $2x + 3$.

2. Miscelánea de las operaciones suma, resta, multiplicación y división.

a) ¿Qué expresión hay que añadir a $3x^2 - 5x + 6$ para que la suma sea $3x$?

b) Simplificar $(x + y)(x - y) - (x + y)^2$.

c) Restar $x^2 - 3xy + y^2$ de $3x^2 - 5y^2$ y sumar la diferencia con el resultado de restar $5xy + x^2$ de $2x^2 + 5xy + 6y^2$.

d) Multiplicar $a^2 - ab + b^2$ por $a^2 + ab - 2b^2$.

e) Dividir la suma de $x^5 - x^3 + 5x^2$, con $-2x^4 + 2x^2 - 10x$, con $6x^3 - 6x + 30$ entre $x^2 - 2x + 6$.

f) Restar $-x^2 - 3xy + y^2$ de cero y multiplicar la diferencia por el cociente de dividir $x^3 - y^3$ entre $x - y$.

g) Por cuál expresión hay que dividir el cociente de $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ entre $x + 3$ para obtener el resultado $x - 2$.

3.8. Productos notables

Se llaman productos notables, a ciertos productos que cumplen con reglas fijas y definidas, cuyo resultado puede ser escrito fácilmente (por inspección), sin haber realizado la multiplicación.

3.8.1. Binomio al cuadrado.

Para elevar un binomio al cuadrado usamos la siguiente regla: El cuadrado de la suma o diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primer cantidad más (o menos) el doble producto de la primer cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad. Bueno, ¿y esta regla? Veamos la figura (3.4), si realizamos el cálculo que hicimos en la multiplicación de polinomios, cada división tiene una expresión que la define, entonces $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

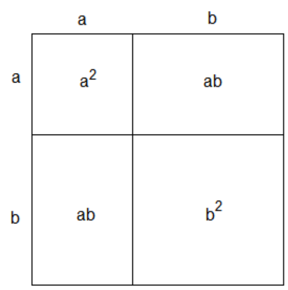

Figura 3.4: Binomio al cuadrado

EJEMPLO 3.20. *Una ama de casa tiene una caja en la que va a guardar condimentos de cocina (orégano, pimienta, cominos y sazonador de carnes en polvo), es de base cuadrada, no sabe cuánto mide de lado, pero quiere una de las divisiones sea cuadrada de* $9\ cm^2$*, ¿cuál será el área de ésta caja?*

Solución. Nos auxiliaremos de la figura (3.5) para resolver el problema. Vamos a dividir el

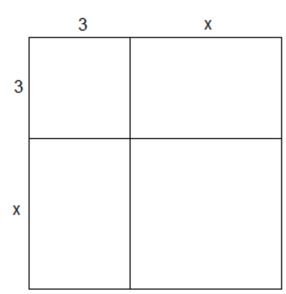

Figura 3.5: Binomio al cuadrado auxiliar

cuadrado con dos líneas para que queden 4 divisiones de tal forma que una de las divisiones sea de 9 unidades cuadradas (u^2), como no sabemos cuánto mide de lado, el tramo que sobra es de x unidades, de forma que el cuadrado mide $3+x$ por lado. Entonces el área a calcular se expresa por l^2, o también como $(3+x)^2$. Aplicamos la regla del binomio al cuadrado y tenemos que $3^2+2(3)(x)+(x)^2$ lo que nos da como resultado $9+6x+x^2$ ó x^2+6x+9.

∎

EJEMPLO 3.21. *Juan desea dividir su librero cuadrado de pared, en cuatro partes y desea dejar una división de 1 m^2 para poner su televisión. Aún si desconoce sus medidas, ¿cuál es el área del librero?*

Solución. Se deja al alumno como ejercicio.

∎

1. Ejercicios: Desarrolla los siguientes binomios al cuadrado por simple inspección.

   a) $(m+3)^2$.
   b) $(5-x)^2$.
   c) $(6a+b)^2$.
   d) $(-9+4m)^2$.
   e) $(7x+11)^2$.
   f) $(1-3x^2)^2$.
   g) $(2x+3y)^2$.
   h) $(-a^2x+by^2)^2$.
   i) $(3a^3+8b^4)^2$.
   j) $(4m^5-5n^6)^2$.

3.8.2. Binomio al cubo.

El cubo de la suma o diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primer cantidad más (o menos) el triple producto del cuadrado de la primer cantidad por la segunda, más el triple producto de la primer cantidad por el cuadrado de la segunda más (o menos) el cubo de la segunda cantidad.

¿Y esta regla?, ¿de dónde sale? Bueno, vimos que un binomio es, por ejemplo, $a+b$, al cubo será entonces $(a+b)^3$, y esto lo podemos expresar como el producto de $(a+b)^2(a+b)$, y vimos anteriormente que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, entonces solo falta realizar el producto por el binomio $a+b$, finalmente

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

EJEMPLO 3.22. *Pedrito está jugando con cajas de diferentes tamaños, y los acomoda de tal manera que construye un cubo, su padre, que lo estaba viendo, se da cuenta que cada arista mide $x+y$ unidades, ¿cuál es el volumen de dicho cubo?*

Solución. Para resolver el siguiente problema, nos auxiliamos de un cubo, que mide $x + y$ unidades de arista ver la figura (3.6), entonces, conocer el volumen de un cubo es elevar al cubo su arista, entonces, lo obtenemos de la siguiente forma

$$V = l^3 = (x + y)^3$$

que se desarrolla así

$$(x)^3 + 3(x)^2(y) + 3(x)(y)^2 + (y)^3$$

y finalmente tendremos

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

que es el volumen que estamos buscando.

∎

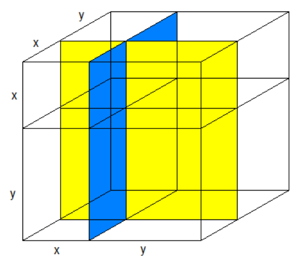

Figura 3.6: Binomio al cubo

1. Ejercicios: Desarrolla los siguientes binomios al cubo por simple inspección.
   a) $(a + 2)^3$.
   b) $(x - 1)^3$.
   c) $(2x + 1)^3$.
   d) $(1 - 3y)^3$.
   e) $(2 + y^2)^3$.
   f) $(1 - 2n)^3$.
   g) $(a^2 - 2b)^3$.
   h) $(2x + 3y)^3$.
   i) $(1 - a^2)^3$.
   j) $(2xy^2 + 5y^3z)^3$.

3.8.3. Binomio conjugados.

El producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas, es igual a la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades, esto es $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

EJEMPLO 3.23. *Pedro va a comprar tarjetas coleccionables. Compra 32 tarjetas a 28 pesos cada una, ¿cuánto se gastó en total?*

Solución. Para resolver este problema en lugar de hacer la multiplicación como normalmente lo haríamos, también podemos disponer las cantidades de la siguiente forma, 32 es igual a $30+2$, y 28 es igual a $30-2$, entonces

$$(30+2)(30-2)$$

que de acuerdo con la regla para binomios conjugados

$$(30)^2-(2)^2$$

nos queda

$$900-4=896$$

es decir, gastó 896 pesos.

∎

EJEMPLO 3.24. *Ramiro va a comprar estampillas para enviar tarjetas de felicitaciones a sus familiares que viven en el extranjero. Si va a enviar* 15 *tarjetas, (en cada tarjeta debe ir una estampilla), y cada estampilla cuesta* 25 *centavos, ¿cuánto se gastará en total?*

Solución. Se deja al alumno como ejercicio.

∎

1. Desarrolla los siguientes binomios conjugados por simple inspección.
   a) $(x+y)(x-y)$.
   b) $(m-n)(m+n)$.
   c) $(a+x)(x-a)$.
   d) $(x^2+a^2)(x^2-a^2)$.
   e) $(2a-1)(1+2a)$.
   f) $(n-1)(n+1)$.
   g) $(1-3ax)(3ax+1)$.
   h) $(2m+9)(2m-9)$.
   i) $(a^3-b^2)(a^3+b^2)$.
   j) $(y^2-3y)(3y+y^2)$.

3.8.4. Binomios con término común

El producto de dos binomios de la forma $(x+a)(x+b)$ es igual al cuadrado del término común más o menos la suma algebraica de los términos independientes de cada binomio por el término común, más (o menos) el producto de los términos independientes, esto es $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

EJEMPLO 3.25. *Antonio Pérez es pasante de Arquitectura y está haciendo la maqueta de la construcción de una casa en un terreno rectangular, si en el terreno que dispone, la planta habitación que estará en una esquina debe medir x metros de lado, ¿cuál es el área del terreno?*

Solución. En este caso, procedemos de la misma forma que si fuera un binomio al cuadrado, de acuerdo con la figura (3.7), sabemos que el área de un rectángulo es bh, donde la distancia que falta en cada lado la designaremos con a para un lado y b para el otro, entonces podemos escribir

$$(x+a)(x+b)$$

y, de acuerdo con la regla tenemos que

$$(x)^2+(a+b)x+ab$$

o simplemente escribimos

$$x^2+(a+b)x+ab$$

que es el resultado buscado.

■

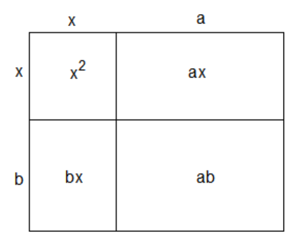

Figura 3.7: Binomio con término común

1. Ejercicios: Desarrolla los siguientes binomios con término común por simple inspección.

   a) $(x+7)(x-3)$.
   b) $(x+2)(x-1)$.
   c) $(a-11)(a-10)$.
   d) $(n-19)(n+10)$.
   e) $(a^2+5)(a^2-9)$.
   f) $(x^2-1)(x^2-7)$.
   g) $(n^2-1)(n^2+20)$.
   h) $(n^3+3)(n^3-6)$.
   i) $(x^3+7)(x^3-6)$.
   j) $(a^4+8)(a^4-1)$.

3.9. Factorización

Se llama factorización al procedimiento de convertir una expresión algebraica en factores o producto indicado de sus factores.

EJEMPLO 3.26. *El producto y sus factores.*

Solución. Si multiplicamos a y $a+b$, tenemos

$$a(a+b) = a^2 + ab$$

entonces se dice que a y $a+b$ son factores o divisores de

$$a^2 + ab$$

lo mismo es para

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$$

en donde $x+2$ y $x+3$ son factores de $x^2 + 5x + 6$.

■

Factor común monomio y polinomio.

Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección, así, los factores de $15ab$ son 3, 5, a y b. Por tanto, $15ab = (3)(5)(a)(b)$.

No todo polinomio se puede descomponer en dos o más factores distintos de 1, hay expresiones algebraicas que sólo son divisibles por ellas mismas y por la unidad, y que por lo tanto no son el producto de otras expresiones algebraicas. Así, $x+y$ no puede descomponerse en dos factores distintos de 1 porque sólo es divisible por 1 y por $x+y$.

EJEMPLO 3.27. *Descomponer en factores $b + b^2$.*

Solución. El primer término, b, es lo mismo que

$$(b)(1),$$

y el segundo término, b^2, es

$$(b)(b).$$

Esto nos dice que en los dos términos hay un factor común b, (o multiplicador común). Y por la propiedad distributiva podemos escribir

$$(b)(\quad + \quad)$$

el segundo factor lo vamos a obtener en dos partes (puesto que tenemos dos términos), dividiendo el primer término, y escribiendo el resultado dentro del paréntesis, luego

$$(b)(1+ \quad)$$

y la segunda parte, consiste en dividir el segundo término entre el factor común, y tenemos

$$(b)(1+b)$$

es decir, que el binomio

$$b + b^2 = (b)(1 + b)$$

aunque normalmente, un factor común monomio no suele escribirse entre paréntesis, y es

$$b + b^2 = b(1 + b)$$

■

EJEMPLO 3.28. *Descomponer en factores* $abc + abc^2$.

Solución. El factor común monomio (fcm), es en este caso

$$abc$$

es el factor común, y dividiendo cada término entre el factor común, tendremos

$$abc(1 + c).$$

■

EJEMPLO 3.29. *Descomponer en factores* $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$.

Solución. En los ejemplos anteriores los coeficientes de cada término eran iguales a 1, y en este caso, un coeficiente es 24 y el otro es -36, el factor común de estos coeficientes es

$$12$$

otro nombre que recibe este factor común es máximo común divisor, de las tres literales del primer término, la a no es común, puesto que no aparece en los dos términos. La x que aparece en los dos términos es de primero y segundo grado respectivamente, entonces, tomamos la x de primer grado (puesto que lo que se repite es x no x^2), y de la literal y, tomamos la y^2, (ya que es común la y^2 y no la y^4). Entonces el factor común será

$$12xy^2$$

y obteniendo el segundo factor, finalmente queda

$$12xy^2(2a^2 - 3xy^2)$$

■

EJEMPLO 3.30. *Descomponer en factores* $2x(n - 1) - 3y(n - 1)$.

Solución. En este caso, tenemos igualmente dos términos, pero ahora, el término común, realmente son dos términos comunes o sea un binomio común, es decir, un factor común polinomio (fcp),

$$(n - 1),$$

luego, al dividir cada término entre este factor común polinomio, obtenemos

$$(n - 1)(2x - 3y).$$

■

3.9.1. Factor común por agrupación de términos

En la factorización por agrupación de términos, primero agrupamos los términos y obtenemos un factor común monomio de ellos, y después obtenemos el el factor común polinomio.

EJEMPLO 3.31. *Un terreno tiene un área de* $70mf + 84fy + 1050mp + 1260py$ *unidades cuadradas, donde las medidas son metros, yardas, pies (f) y pulgadas, ¿cuál es la medida de los lados?*

Solución. Los dos primero términos tienen un factor común, y los dos últimos también tienen un factor común, entonces

$$(70mf + 84fy) + (1050mp + 1260py)$$

factorizando el término común monomio, tenemos

$$14f(5m + 6y) + 210p(5m + 6y)$$

factorizando el término común polinomio, tenemos que

$$(5m + 6y)(14f + 210p)$$

dice: un lado mide 5 metros con 6 yardas y el otro mide 14 pies con 210 pulgadas.

1. Ejercicios: factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

   a) $ax + ay + bx + by$.
   b) $a^2 + ab + ax + bx$.
   c) $am - bm + an - bn$.
   d) $ax - 2bx - 2ay + 4by$.
   e) $3m - 2n - 2nx^4 + 3mx^4$.
   f) $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$.
   g) $x^2 - a^2 + x - a^2x$.
   h) $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$.
   i) $x + x^2 - xy^2 - y^2$.
   j) $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$.

3.9.2. Trinomio cuadrado perfecto

A una cantidad se le llama *cuadrado perfecto* cuando es el cuadrado de otra cantidad, o sea, cuando es el producto de dos factores iguales. Así, por ejemplo, $4a^2$ es cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $2a$. En efecto, $(2a)^2 = (2a)(2a) = 4a^2$ y $2a$ es una cantidad que multiplicada por si misma da $4a^2$, además es la raíz cuadrada de $4a^2$. Nota: Observe que $(-2a)(-2a) = 4a^2$. Así es que, la raíz cuadrada de una cantidad positiva tiene dos signos $(+)$ y $(-)$. En los siguientes temas nos referiremos solo a la raíz positiva.

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio se extrae la raíz cuadrada de su coeficiente y el exponente de su literal se divide entre 2; entonces, la raíz cuadrada de $9a^2b^4$ es $3ab^2$ y la raíz cuadrada de $36x^6y^8$ es $6x^3y^4$.

Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales. Así, por ejemplo, $a^2 + 2ab + b^2$ es un cuadrado perfecto porque es el cuadrado de $a + b$, esto es, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$.

La factorización de un Trinomio Cuadrado Perfecto o TCP, es la operación contraria a la de desarrollar un binomio al cuadrado. Para realizarla, es necesario verificar si el trinomio es cuadrado perfecto de la siguiente manera: Ordenamos el trinomio, alfabéticamente y en grado descendente, extraemos la raíz cuadrada de la primer cantidad y de la última, obtenemos el doble producto de ambas cantidades y verificamos que el resultado sea una expresión igual al término lineal, si lo es, en un paréntesis elevado al cuadrado, escribimos la suma o diferencia (según sea el caso) de las cantidades.

EJEMPLO 3.32. *Factorizar el trinomio $a^2 - 4ab + 4b^2$.*

Solución. Primero debemos verificar que el trinomio sea un cuadrado perfecto, entonces extraemos la raíz cuadrada del primer término que es

$$a$$

y enseguida, la raíz cuadrada del último término, que es

$$2b$$

finalmente, realizamos el doble producto de ambas raíces cuadradas y tenemos

$$4ab$$

que coincide con el término lineal, por tanto, es un cuadrado perfecto y su factorización es

$$(a - 2b)^2.$$

■

EJEMPLO 3.33. *Una alberca cuadrada, tiene un área definida por la expresión x^2+6x+9, ¿cuál es la medida de sus lados?*

Solución. La expresión está ordenada, extraemos la raíz cuadrada del primer y último términos, y tenemos

$$x \text{ y } 3$$

obtenemos el doble producto con los resultados obtenidos y encontramos que

$$6x$$

es idéntico a el término lineal de la expresión cuadrática, lo cual significa que es un TCP, y escribimos

$$(x + 3)^2$$

en donde cada lado mide $x+3$ unidades, puesto que es un cuadrado.

∎

1. Ejercicios: factoriza los siguientes TCP's.
   a) $a^2-2ab+b^2$.
   b) x^2-2x+1.
   c) y^4+1+2y^2.
   d) $a^2-10a+25$.
   e) $9-6x+x^2$.
   f) $16+40x^2+25x^4$.
   g) $1+49a^2-14a$.
   h) $36+12m^2+m^4$.
   i) $1-2a^3+a^6$.
   j) a^8+18a^4+81.

3.9.3. Diferencia de cuadrados

Recordando los productos notables, se vió que $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, por lo tanto, recíprocamente, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Regla para factorizar una diferencia de cuadrados. Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y expresamos el producto de la suma por la diferencia de estas raíces.

EJEMPLO 3.34. *Factorizar* $1-a^2$.

Solución. Obtenemos la raíz cuadrada del minuendo que es

$$1,$$

luego extraemos la raíz cuadrada del sustraendo

$$a,$$

y expresamos la suma por la diferencia de estas dos cantidades de la siguiente forma

$$(1+a)(1-a)$$

∎

EJEMPLO 3.35. *Factorizar* $49x^2y^6z^{10}-a^{12}$.

Solución. Extraemos la raíz cuadradas del minuendo que es

$$7xy^3z^5,$$

y la raíz cuadrada del sustraendo es

$$a^6,$$

y escribimos la suma por la diferencia de estas cantidades y queda como sigue

$$(7xy^3z^5 - a^6)(7xy^3z^5 + a^6)$$

∎

1. Ejercicios: factoriza las siguientes expresiones de diferencia de cuadrados.
   a) $x^2 - y^2$.
   b) $a^2 - 1$.
   c) $a^2 - 4$.
   d) $9 - b^2$.
   e) $1 - 4m^2$.
   f) $16 - n^2$.
   g) $a^2 - 25$.
   h) $1 - y^2$.
   i) $4a^2 - 9$.
   j) $25 - 36x^4$.

3.9.4. Trinomio de la forma $x^2 + Bx + C$

Analizando los trinomios que poseen esta forma, vemos lo siguiente:

- El coeficiente del primer término es 1.
- El primer término es una literal cualquiera elevada al cuadrado. Se le llama *término cuadrático*.
- El segundo término tiene la misma literal que el primero, solamente que de primer grado y su coeficiente puede ser positivo o negativo. Se le llama *término lineal*.
- El tercer término es independiente de la literal que aparece en el primero y segundo términos y es una cantidad cualesquiera con signo positivo o negativo. Se le llama *término independiente*.

Regla para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + Bx + C$.

1. El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es x, o sea, la raíz cuadrada del primer término del binomio.
2. En el primer factor, después de x, se escribe el signo del término lineal, y en el segundo factor (después de x) se escribe el signo resultante de multiplicar el signo del término lineal e independiente.
3. Si en los dos factores binomios, después de x, se tiene el mismo signo, se buscan dos números que sumados sea el valor del coeficiente B, y cuyo producto sea el coeficiente C. Estos números son los segundos términos de los binomios factores.

4. Si en los dos factores binomios, después de x, se tienen signos contrarios, se buscan dos números cuya diferencia sea el valor del coeficiente B, y cuyo producto sea el valor del coeficiente C.

EJEMPLO 3.36. *Factorizar* $x^2 - 2x - 15$.

Solución. Escribimos dos paréntesis y como primer término la raíz cuadrada

$$(x \quad)(x \quad),$$

los signos serán $(-)$ y $(+)$, respectivamente, entonces

$$(x- \ )(x+ \ ),$$

finalmente buscamos dos cantidades cuya diferencia sea B, en este caso -2 y cuyo producto sea C, es decir, -15, estos números son -5 y 3 por lo tanto, tenemos

$$(x-5)(x+3).$$

■

1. Ejercicios: Factoriza los siguientes trinomios cuadrados.
   a) $x^2 - x - 6$.
   b) $x^2 + 7x - 18$.
   c) $8x - 65 + x^2$.
   d) $x^2 - 108 + 3x$.
   e) $x^2 - 3x + 2$.
   f) $x^2 - 15 - 2x$.
   g) $x^2 - 19x + 88$.
   h) $4x - 285 + x^2$.
   i) $5x(x-1) - 2(2x^2 - 7x) + 8$.
   j) $x(x-1) - 5x(x-2) - 2$.

3.9.5. Trinomio de la forma $Ax^2 + Bx + C$

Para factorizar este tipo de trinomio es necesario que el primer término sea un cuadrado perfecto, asi que multiplicamos el primer y el último término por el coeficiente de x^2, y dejamos expresada la operación en el término lineal, enseguida procedemos con una ligera variación del caso anterior.

EJEMPLO 3.37. *Un cultivo de bacterias está modelado por la ecuación* $-8x^2 - 14x + 15$, *donde sus factores indican reproducción y deceso. Encontrar dichos factores.*

Solución. El primer paso es factorizar el signo de toda la expresión y trabajar con el signo menos afuera del paréntesis, luego multiplicamos el primer y el último término por el coeficiente, 8, y dejar expresada la operación en el término lineal, entonces

$$-(8x^2 + 14x - 15) = -(64x^2 + 14x(8) - 120)$$

extraemos raíz cuadrada del término $64x^2$, acomodamos el resultado entre paréntesis, con sus signos

$$-(8x+\quad)(8x-\quad)$$

buscamos dos cantidades que sumadas nos den 14 y multiplicadas nos den -120, son 20 y -6, entonces

$$-(8x+20)(8x-6)$$

y como previamente habiamos multiplicado por 8, entonces dividimos por 8. Para evitar fracciones, descomponemos el 8 en 4×2, luego nos queda

$$\frac{-(8x+20)(8x-6)}{(4)\cdot(2)} = -(2x+5)(4x-3)$$

y finalmente, si multiplicamos el segundo factor por el signo menos nos queda

$$(2x+5)(3-4x)$$

que son los datos buscados.

∎

1. Resuelve los siguientes problemas de TC de la forma $Ax^2 + Bx + C$.

   a) $2x^2 + 7x - 4$.
   b) $6x^2 - 10 + 11x$.
   c) $20x^2 - 27x - 14$.
   d) $7x - 15 + 30x^2$.
   e) $60 - 8x^2 - 157x$.
   f) $x(x-1) - 5x(x-2) - 2$.
   g) $(x-2)^2 - (2x+3)^2 + 80$.
   h) $\frac{6}{x^2} - \frac{9}{x} + \frac{4}{3}$.
   i) $\frac{x+2}{x} + x - \frac{74}{x}$.
   j) $(x+2)^2 - \frac{2x-5}{3} - 3$.

3.9.6. Suma o diferencia de cubos

Si dividimos $a^3 + b^3$ entre $a + b$ tenemos $a^2 - ab + b^2$. Por otra parte, si dividimos $a^3 - b^3$ entre $a - b$, el resultado es $a^2 + ab + b^2$. Y como en toda división exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, y tendremos

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

La primera fórmula nos dice que:

Regla 1. La suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores: Primer factor. La suma de sus raíces cúbicas. Segundo factor. El cuadrado de la primer raíz cúbica menos el producto de las raíces, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

Regla 2. La diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores: Primer factor. La diferencia de sus raíces cúbicas. Segundo factor. El cuadrado de la primer raíz cúbica más el producto de las raíces, más el cuadrado de la segunda raíz cúbica.

EJEMPLO 3.38. *Factorizar* $x^3 + 1$.

Solución. La raíz cúbica de x^3 es

$$x,$$

y la raíz cúbica de 1 es

$$1,$$

por lo tanto, de acuerdo con la regla 1 (suma de cubos), el primer factor es

$$(x + 1)$$

y el segundo factor, queda

$$(x^2 - x + 1),$$

por lo tanto, $x^3 + 1$, se factoriza como sigue

$$(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

■

EJEMPLO 3.39. *Factorizar* $27a^3 - b^6$.

Solución. Extraemos la raíz cúbica del primer término que es

$$3a$$

y la raíz cúbica del segundo término es

$$b^2,$$

entonces, de acuerdo con la regla 2 (diferencia de cubos), el primer factor quedará

$$(3a - b^2)$$

y el segundo factor

$$(9a^2 + 3ab^2 + b^4)$$

entonces al factorizar $27a^3 - b^6$, tenemos

$$(3a - b^2)(9a^2 + 3ab^2 + b^4).$$

■

1. Ejercicios: Factoriza las siguientes expresiones de suma o diferencia de cubos.

a) $1 + a^3$.

b) $x^3 + y^3$.

c) $m^3 - n^3$.

d) $a^3 - 1$.

e) $8x^3 - 1$.

f) $x^3 - 27$.

g) $27a^3 - b^3$.

h) $64 + a^6$.

i) $a^3 - 125$.

j) $64a^3 - 729$.

3.9.7. División sintética

Regla práctica para hallar el cociente y el residuo de la división de un polinomio entero en x por $x - a$.

Para encontrar la regla, hagamos lo siguiente: Dividamos $x^3 - 5x^2 + 3x + 14$ entre $x - 3$.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 3 \\ \hline
x - 3 & x^3 - 5x^2 + 3x + 14 \\
 & \underline{-x^3 + 3x^2} \\
 & \quad -2x^2 + 3x + 14 \\
 & \quad \underline{2x^2 - 6x} \\
 & \qquad -3x + 14 \\
 & \qquad \underline{3x - 9} \\
 & \qquad\quad 5
\end{array}$$

Figura 3.8: División con residuo

por lo tanto $\frac{x^3-5x^2+3x+14}{x-3} = x^2 - 2x - 3 + \frac{5}{x-3}$.

Sin efectuar la división, por el método de la casita, el cociente y el residuo pueden hallarse por la siguiente regla práctica llamada división sintética.

1. El cociente es un polinomio en x cuyo grado es uno menos que el grado del dividendo.

2. El coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo.

3. El coeficiente de un término cualquiera del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el segundo término del binomio divisor cambiando de signo y sumando este producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.

4. El residuo se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente por el segundo término del divisor cambiado de signo y sumando este producto con el término independiente del dividendo.

Apliquemos esta regla a la división anterior

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 14 & 3 \\ & (1)(3)=3 & (-2)(3)=-6 & (-3)(3)=-9 & \\ \hline 1 & -2 & -3 & 5 & \end{array}$$

el 3 es el segundo término del divisor con el signo contrario. El cociente será un polinomio en x de segundo grado porque el dividendo es de tercer grado, por lo tanto, el cociente de la división es: $x^2 - 2x - 3$ y el residuo es 5.

EJEMPLO 3.40. *Por división sintética, hallar el cociente y el residuo de dividir* $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 4x - 105$ *entre* $x + 2$.

Solución.

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 6 & -4 & -105 & -2 \\ & (2)(-2)=-4 & (-9)(-2)=18 & (24)(-2)=-48 & (-52)(-2)=104 & \\ \hline 2 & -9 & 24 & -52 & -1 & \end{array}$$

∎

EJEMPLO 3.41. *Por división sintética, hallar el cociente y el residuo de dividir* $x^4 - 3x + 5$ *entre* $x - 1$.

Solución.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -2 & 3 & \end{array}$$

Por lo tanto el cociente es x^3+x^2+x-2 y el residuo es 3.

EJEMPLO 3.42. *Por división sintética, hallar el cociente y el residuo de dividir* $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 6$ *entre* $x + 3$.

Solución.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 2 & -2 & 1 & -6 & -3 \\ & -3 & 3 & -3 & 6 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto, el cociente es $x^3 - x^2 + x - 2$ y el residuo es cero, esto quiere decir que al sustituir la x por -3 en el polinomio se anula, es decir se hace cero, luego es divisible por $x+3$, entonces podemos escribir lo siguiente $x^4+2x^3-2x^2+x-6 = (x+3)(x^3-x^2+x-2)$.

∎

1. Halle por división sintética el cociente y el residuo de las siguientes divisiones.
   a) $x^3 + x^2 - 2x - 2$ entre $x + 1$.
   b) $n^4 - 5n^3 + 4n - 48$ entre $n + 2$.
   c) $x^5 + x^4 - 12x^3 - x^2 - 4x - 2$ entre $x + 4$.
   d) $x^5 - 208x^2 + 2076$ entre $x - 5$.
2. Encuentra los divisores por división sintética.
   a) $x^3 + x^2 - x - 1$.
   b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$.
   c) $a^3 - 3a^2 - 4a + 12$.
   d) $m^3 - 12m + 16$.
   e) $2x^3 - x^2 - 18x + 9$.
   f) $a^3 + a^2 - 13a - 28$.
   g) $x^3 + 2x^2 + x + 2$.
   h) $n^3 - 7n + 6$.
   i) $x^3 - 6x^2 + 32$.
   j) $6x^3 + 23x^2 + 9x - 18$.

3.10. Operaciones con fracciones

3.10.1. Multiplicación y división de fracciones

Para multiplicar dos fracciones algebraicas se multiplican primero los numeradores para obtener un nuevo numerador y después los denominadores para obtener un nuevo denominador. La nueva fracción algebraica obtenida deberá ser simplificada.

EJEMPLO 3.43. *Multiplicar* $\frac{2xy^2}{3x^2y^3}$ *por* $\frac{6x^3y}{5xy^2z}$

Solución. Escribimos la multiplicación y tenemos

$$\frac{2xy^2}{3x^2y^3} \times \frac{6x^3y}{5xy^2z}$$

es decir,

$$\frac{(2xy^2)(6x^3y)}{(3x^2y^3)(5xy^2z)} = \frac{12x^4y^3}{15x^3y^5z}$$

simplificando la fracción, el resultado es

$$\frac{4x}{5y^2z}.$$

∎

Para dividir dos fracciones algebraicas se multiplican de la siguiente forma, el numerador de la primer fracción se multiplica por el denominador de la segunda fracción para formar el numerador de una nueva fracción, esto es, del resultado. Enseguida, se multiplica de denominador de la primer fracción por el numerador de la segunda para obtener el denominador de la fracción nueva, finalmente, el resultado se simplifica.

EJEMPLO 3.44. *Dividir* $\frac{2xy^2}{3x^2y^3}$ *entre* $\frac{6x^3y}{5xy^2z}$

Solución. Escribimos la división, en la forma

$$\frac{2xy^2}{3x^2y^3} \div \frac{6x^3y}{5xy^2z}$$

realizando las multiplicaciones tendremos

$$\frac{(2xy^2)(5xy^2z)}{(3x^2y^3)(6x^3y)} = \frac{10x^2y^4z}{18x^5y^4}$$

así que la fracción simplificada, será

$$\frac{5z}{9x^3}.$$

■

3.10.2. Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar dos o más fracciones algebraicas se observa lo siguiente: Si tienen el mismo denominador, el resultado es una fracción cuyo numerador es la suma o resta (en orden estricto) de los numeradores anteriores y el denominador es el denominador común.

Si el denominador es diferente en las fracciones a sumar o restar, se debe encontrar primero el mcm (mínimo común múltiplo) y el resultado es la fracción que tiene ese mismo denominador y los numeradores van a ser la suma o resta de dividir con el mcm cada denominador y multiplicarlo por su numerador correspondiente.

EJEMPLO 3.45. *Encontrar la suma indicada en*

$$\frac{x^2-2xy}{3(x^2-y^2)} + \frac{y}{6x-6y} - \frac{x}{4(x+y)}$$

Solución. Ya que el primer denominador se puede escribir como un diferencia de cuadrados, el mínimo común múltiplo es, $mcm = 12(x-y)(x+y)$, que es el denominador del resultado, y el numerador es

$$\frac{12(x-y)(x+y)}{3(x-y)(x+y)} \cdot (x^2-2xy) + \frac{12(x-y)(x+y)}{6(x-y)} \cdot y - \frac{12(x-y)(x+y)}{4(x+y)} \cdot x$$

así que simplificando tenemos

$$\frac{4(x^2-2xy)+2y(x+y)-3x(x-y)}{12(x-y)(x+y)}$$

y realizando las operaciones indicadas en el numerador, tenemos

$$\frac{4x^2 - 8xy + 2xy + 2y^2 - 3x^2 + 3xy}{12(x-y)(x+y)}$$

reduciendo términos semejantes, tenemos

$$\frac{x^2 - 3xy + 2y^2}{12(x-y)(x+y)}$$

factorizando el numerador encontramos

$$\frac{(x-y)(x-2y)}{12(x-y)(x+y)}$$

así que simplificando, finalmente nos queda como resultado

$$\frac{x-2y}{12(x+y)}.$$

$\blacksquare$

Ejercicios.

1. Efectúe las operaciones indicadas y simplifíque los resultados.

   a) $\frac{2}{3t} - \frac{1}{2r} - \frac{2r-3t}{12rs}$

   b) $\frac{2x}{3yz} + \frac{3y}{5xz} - \frac{5z}{7xy}$

   c) $\frac{3a}{2bc} - \frac{2b}{3abc} + \frac{4c}{5a^2b}$

   d) $\frac{x}{2y^2z^3} - \frac{3y}{4x^3z} + \frac{5z}{6xy^3}$

   e) $\frac{10b^2-ab}{a(a^2-4b^2)} - \frac{1}{a-2b} + \frac{2}{a}$

Capítulo 4

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal es una igualdad en la que intervienen expresiones algebraicas en ambos lados de ella. El signo igual indica que ambas expresiones tienen el mismo valor.

4.1. Ecuaciones lineales

- Una ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que sólo se verifica o es verdadera para determinados valores de las incógnitas. Las incógnitas se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z. Así, $5x+2=17$ es una ecuación cuya incógnita es x, y donde la igualdad se verifica solo para $x=3$, puesto que $5(3)+2=17$, entonces $17=17$.
- El grado de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación, así $4x-6=3x-1$, y $ax+b=b^2x+c$ son ecuaciones de primer grado en x, puesto que el exponente de x es 1.
- La ecuación $x^2-5x+6=0$ es de segundo grado, porque el mayor exponente de x es 2.
- Las ecuaciones de primer grado se llaman ecuaciones lineales.
- Las raíces o soluciones de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en una identidad. Por ejemplo, la ecuación $4x-5=x+4$, se satisface solamente para el valor $x=3$, ya que $4(3)-5=3+4$, es decir, $7=7$.
- Las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen solamente una raíz.
- Resolver una ecuación es hallar sus raíces, o sea, el valor o los valores (en el caso de las ecuaciones no lineales) de las incógnitas que satisfacen la ecuación.
- La transposición de términos consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro a otro cambiándole el signo.

Reglas para resolver una ecuación

1. Si los dos miembros de una ecuación se suman o se restan con una misma cantidad positiva o negativa, la igualdad se mantiene.
2. Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva o negativa, la igualdad se mantiene.
3. Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos se extrae una misma raíz, la igualdad se mantiene.

EJEMPLO 4.1. *Sea la ecuación* $5x = 2a - b$ *transponer* b.

Solución. Sumando b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad se mantiene, es decir

$$5x + b = 2a - b + b,$$

y como $-b + b = 0$, entonces la ecuación queda

$$5x + b = 2a,$$

donde vemos que $-b$, que estaba en el segundo miembro de la ecuación dada, ha pasado al primer miembro con signo $(+)$.

■

Cambio de signos. Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por -1, con lo que la igualdad persiste. Así, en la ecuación $-2x - 3 = x - 15$, multiplicando ambos miembros por -1, tendremos $2x + 3 = -x + 15$, que es la ecuación dada con los signos de todos sus términos cambiados.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

1. Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.
2. Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan a la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.
3. Se reducen términos semejantes en cada miembro.
4. Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros por el coeficiente de la incógnita.

EJEMPLO 4.2. *Resolver la ecuación* $x + 3(x - 1) = 6 - 4(2x + 3)$.

Solución. Efectuamos las operaciones indicadas y tenemos

$$x + 3x - 3 = 6 - 8x - 12,$$

enseguida transponemos los términos, en este caso, dejando las incógnitas al lado izquierdo

$$x + 3x + 8x = 6 - 12 + 3,$$

y reduciendo los términos semejantes

$$12x = -3$$

despejamos la incógnita, dividiendo la ecuación por 12,

$$x = -\frac{1}{4}$$

es el valor que debe tomar la incógnita para satisfacer a la ecuación. Podemos hacer la comprobación, puesto que

$$-\frac{1}{4} + 3\left(-\frac{1}{4} - 1\right) = 6 - 4\left(2\left(-\frac{1}{4}\right) + 3\right)$$

y realizando los productos indicados, ahora tenemos

$$-\frac{1}{4} - \frac{15}{4} = 6 - 10$$

que nos presenta la identidad

$$-4 = -4$$

■

1. Ejercicios: resuelve las siguientes ecuaciones lineales.
   a) $4x + 1 = 2$.
   b) $21 - 6x = 27 - 8x$.
   c) $x - (2x + 1) = 8 - (3x + 3)$.
   d) $(x - 2)^2 - (3 - x)^2 = 1$.
   e) $14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] = 0$.

4.2. Aplicaciones

Los problemas algebraicos son las ecuaciones aplicadas a la vida real, con ellas podemos resolver problemas en los que se pueden involucrar unidades de medición, tales como: distancia, tiempo, peso, fuerzas, etc. Como ejemplo de ello veamos el siguiente problema.

EJEMPLO 4.3. *La suma de las edades de Juan y de su hermano es de* 84 *años, el hermano tiene* 8 *años menos que Juan. Hallar ambas edades.*

Solución. Designemos la edad de Juan con el literal x, y como su hermano tiene 8 años menos, entonces la edad del hermano es $x - 8$, y como la suma de ambas edades es de 84 años, tenemos

$$(x) + (x - 8) = 84$$

que reduciendo y despejando, nos queda

$$2x = 92$$

es decir, “el doble de una cantidad es 92”, por tanto la cantidad debe ser

$$x = 46,$$

que es la edad de Juan, luego el hermano debe tener 8 años menos, por tanto

$$38 \text{ y } 46$$

son las edades buscadas.

∎

1. Ejercicios: Resuelve los siguientes problemas de ecuaciones lineales.

    a) El largo de un buque, que es 461 pies, excede en 11 pies a 9 veces el ancho. Hallar el ancho del buque.

    b) Dividir 196 en tres partes tales que la segunda sea el doble de la primera y la suma de las dos primeras exceda a la tercera en 20.

    c) La suma de dos números es 108 y el doble del mayor excede al triple del menor en 156. Hallar los números.

    d) Tenía \$85. Gasté cierta suma y lo que me queda es el cuádruple de lo que gasté, ¿cuánto gasté?

    e) Si a un número se le resta 24 y la diferencia se multiplica por 12, el resultado es el mismo que si al número se le resta 27 y la diferencia se multiplica por 24. Hallar el número.

    f) Hallar tres números enteros consecutivos, tales que el doble del menor más el triple del mediano más el cuádruplo del mayor sean 740.

    g) La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 31. Hallar los números.

    h) Dentro de 5 años la edad de Juan será el triple de la edad de Virginia, y 15 años después la edad de Juan será el doble de la de Virginia. Hallar las edades actuales.

    i) Hallar dos números cuya diferencia sea 18 y cuya suma sea el triple de su diferencia.

    j) Cinco personas han comprado una tienda de abarrotes, contribuyendo por partes iguales. Si hubiera habido dos socios más, cada uno hubiera pagado $\$\ 12,000.00$ menos. ¿Cuánto costó la tienda?

Capítulo 5

Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de segundo grado es toda aquella ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incógnita es 2, así

$$4x^2 + 7x + 6 = 0,$$

es una ecuación de segundo grado. La forma general de una ecuación cuadrática o de segundo grado es $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.

Si $b = 0$, tenemos $ax^2 + c = 0$ forma que es conocida como *ecuación incompleta pura*. Las soluciones están dadas por:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Por otra parte, si $c = 0$, entonces $ax^2 + bx = 0$ se conoce como ecuación incompleta mixta y tiene como soluciones:

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = -\frac{b}{a}$$

Las raíces de una ecuación de segundo grado son los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación. Toda ecuación de segundo grado tiene dos raíces. Resolver una ecuación es hallar las raíces de la ecuación.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado, usaremos los siguientes métodos:

- Solución con la fórmula general.
- Solución por factorización.
- Completando el Trinomio cuadrado perfecto (TCP).

5.1. Solución con la fórmula general

EJEMPLO 5.1. *Juan es dos años mayor que Pedro y la suma de los cuadrados de ambas edades es* 130 *años. Hallar las edades.*

Solución. Designemos a la edad de Juan con la x, entonces la edad de Pedro será $x-2$, dada la edad de Juan, y la suma de los cuadrados de ambas debe ser 130, entonces

$$x^2 + (x-2)^2 = 130$$

desarrollando el cuadrado y simplificando, tenemos que

$$2x^2 - 4x - 126 = 0$$

y aplicándolos a la fórmula general que es

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

entonces tenemos que

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-126)}}{2(2)}$$

y simplificando

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{1024}}{4} = \frac{4 \pm 32}{4}$$

o bien

$$x_1 = 9 \text{ y } x_2 = -7$$

descartamos el segundo valor, puesto que no es lógico hablar que una persona tiene menos siete años, entonces Juan tiene 9 años y Pedro tiene dos años menos, es decir, 7 años, que elevando al cuadrado cada una de estas cantidades, y sumándolas nos da 130.

5.2. Solución por factorización

EJEMPLO 5.2. *La administración municipal adquirió cierto número de unidades para seguridad pública por* $\$24'000,000$*. Si hubiera comprado 3 unidades más por el mismo dinero, cada unidad le habría costado* $\$40,000$ *menos. ¿Cuántas unidades compró y a qué precio?*

Solución. Tenemos dos variables, el precio y la cantidad de unidades, designémoslas por las iniciales p y c, respectivamente, entonces se debe cumplir lo siguiente

$$pc = 24'000,000 \tag{5.1}$$

y si se hubiera comprado 30 unidades más, costarían cada una $40,000$ menos, entonces

$$(p - 40,000)(c + 30) = 24'000,000 \tag{5.2}$$

si despejamos una de las variables, por ejemplo p de (5.1) y la sustituimos en (5.2), queda

$$\begin{aligned} (24'000,000/c - 40,000)(c+30) &= 24'000,000 \\ (24'000,000 - 40,000c)(c+30) &= 24'000,000 \end{aligned}$$

realizando el producto de binomios, y reduciendo términos semejantes tenemos

$$40,000c^2 + 1'200,000c - 720'000,000 = 0$$

dividiendo por el coeficiente del término cuadrático, queda

$$c^2 + 30c - 18,000 = 0$$

resolviendo por factorización, queda

$$(c + 150)(c - 120) = 0$$

y al despejar la c, de cada factor, nos encontramos con

$$c_1 = -150 \text{ y } c_2 = 120$$

el resultado $c = -150$, lo descartamos puesto que no tiene sentido adquirir menos ciento cincuenta unidades, entonces, sustituimos el 120 en la ecuación (1),

$$(120)(p) = 24'000,000$$

para encontrar que el precio fue de \$200,000.

5.3. Completando el TCP

EJEMPLO 5.3. *Un cultivo de bacterias está modelado por la ecuación* $-8x^2-14x+25 = 10$, *encuentre las soluciones de la ecuación.*

Solución. Ordenamos la ecuación de segundo grado en forma descendente y si hay operaciones indicadas, se realizan, así que tenemos

$$-8x^2 - 14x + 15 = 0$$

dividimos toda la ecuación por el coeficiente de x^2, si éste es diferente de 1, luego queda

$$x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{15}{8} = 0$$

dejamos libre el espacio correspondiente al término lineal despejándolo, entonces

$$x^2 + \frac{7}{4}x + \quad = \frac{15}{8}$$

tomemos el coeficiente del término lineal que es $\frac{7}{4}$, le sacamos mitad y al resultado lo elevamos al cuadrado, entonces

$$\frac{7/4}{2} = \frac{7}{8} \to \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}.$$

Esta cantidad la sumamos en ambos miembros de la ecuación, y en el miembro izquierdo tendremos un TCP, que factorizado queda

$$\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 = \frac{169}{64}$$

y despejando la x tenemos que

$$x = -\frac{7}{8} \pm \frac{13}{8}$$

y separando las soluciones el resultado es

$$x_1 = \frac{3}{4} \text{ y } x_2 = -\frac{5}{2}$$

$\blacksquare$

1. Ejercicios: Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por fórmula general.
   - *a*) $3x^2 - 5x + 2 = 0$
   - *b*) $4x^2 + 3x - 22 = 0$
   - *c*) $x^2 + 11x = -24$
   - *d*) $x^2 = 16x - 63$
   - *e*) $12x - 4 - 9x^2 = 0$
   - *f*) $x(x + 3) = 5x - 3$
   - *g*) $3(3x + 2) = (x + 4)(4 - x)$
   - *h*) $(x + 4)^3 - (x - 3)^3 = 343$
   - *i*) $25(x + 2)^2 = (x - 7)^2 - 81$
   - *j*) $3x(x - 2) - (x - 6) = 23(x - 3)$

5.4. Aplicaciones

1. Ejercicios: Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.
   - *a*) La longitud de un terreno rectangular es doble que el ancho. Si la longitud se aumenta en 40m y el ancho en 6m, el área se hace doble. Hallar las dimensiones del terreno.
   - *b*) La suma de dos números es 9 y la suma de sus cuadrados 53. Hallar los números.
   - *c*) Un número positivo es $3/5$ de otro y su producto es 2160. Hallar los números.
   - *d*) José tiene 3 años más que Javier y el cuadrado de la edad de José aumentado en el cuadrado de la edad de Javier equivale a 317 años. Hallar ambas edades.
   - *e*) Un número es el triple de otro y la diferencia de sus cuadrados es $1,800$. Hallar los números.
   - *f*) Hallar dos números consecutivos tales que el cuadrado del mayor exceda en 57 al triple del menor.
   - *g*) La longitud de una sala excede a su ancho en 4m, si cada dimensión se aumenta en 4m, el área será doble. Hallar las dimensiones de la sala.
   - *h*) Un comerciante compró cierto número de sacos de azúcar por 1000 bolívares. Si hubiera comprado 10 sacos más por el mismo dinero, cada saco le habría costado 5 bolívares menos. ¿Cuántos sacos compró y a qué precio?
   - *i*) Un caballo costó 4 veces lo que sus arreos y la suma de los cuadrados del precio del precio del caballo y el precio de los arreos es de $860,625$ sucres. ¿Cuánto costó el caballo y cuánto los arreos?
   - *j*) La diferencia de dos números es 7 y su suma multiplicada por el número menor equivale a 184. Hallar los números.

Parte III

TRIGONOMETRÍA

Capítulo 6

Sistemas de medición para ángulos

Repaso de conceptos de geometría euclideana. En la geometría existen objetos que no se pueden definir, dada su naturaleze recursiva, sin embargo, se les puede describir y tomar esa descripción como axiomas para construir los demás elementos de la geometría, estos primeros conceptos son punto y recta. Diremos que *punto* es la marca que deja la punta de un lápiz cuando toca una superficie, y *recta* es la marca que deja la punta de un lápiz al moverlo sobre una superficie. Podremos ya dar las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 6.1 (Segmento)**.** *Es la parte de la recta AB entre A y B, junto con los puntos A y B, es* segmento AB *y simbólicamente se escribe* $\overline{AB}$.

DEFINICIÓN 6.2 (Semirrecta)**.** *Si A y B son puntos de la recta l, entonces el conjunto de los puntos de l que se encuentran del mismo lado de A que B es la* semirrecta de A que pasa por B.

DEFINICIÓN 6.3 (Rayo)**.** *Si A y B son puntos de la recta l, entonces el conjunto de puntos que consiste de A y todos los puntos que se encuentran del mismo lado de A que B* es el rayo de A hacia B. *El punto A se llama* punto extremo *del rayo AB y simbólicamente se escribe* $\overrightarrow{AB}$.

Figuras geométricas. Las figuras geométricas se clasifican en figuras regulares e irregulares. Veremos solamente figuras regulares. Polígonos regulares: Triángulos, cuadrilátero, pentágonos, hexágonos, circunferencia.

1. Clasificación de triángulos por sus lados.
   - Escaleno.
   - Isósceles.
   - Equilátero.
2. Clasificación de triángulos por sus ángulos.
   - Rectángulo.
   - Equiángulo.
   - Acutángulo.

- Obtusángulo.

Lineas notables en el triángulo. Las lineas notables en el triángulo son:

Mediatriz. Linea perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado del triángulo.

Bisectriz. Linea que divide al ángulo formado por dos lados adyacentes.

Mediana. Linea que une el punto medio de cada lado con el vértice opuesto.

Altura. Linea perpendicular a cada uno de los lados que pasa por el vértice del lado opuesto.

TEOREMA 6.1 (Teorema de Pitágoras)**.** *En todo triángulo rectángulo euclideano*[1]*, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

En esta parte correspondiente a la trigonometría, veremos los conceptos básicos para que el alumno pueda adquirir conocimientos suficientes para resolver problemas en los cuales se involucren funciones trigonométricas.

6.1. Ángulos positivos y negativos

El ángulo XOP está formado por las dos semirrectas secantes OX y OP. El punto O es el vértice del ángulo, y las semirrectas son los lados del ángulo.

Más aún, se puede suponer que un ángulo se genera mediante un giro de una semirrecta desde una posición inicial OX hasta una posición terminal OP. Así, el punto O sigue siendo el vértice, OX es el *lado inicial* y OP el *lado terminal*.

Un ángulo así generado es *positivo* si el sentido de giro (indicado por una flecha curvilínea) es contrario a las manecillas de un reloj, y *negativo* si el sentido de giro es el mismo de las manecillas de un reloj.

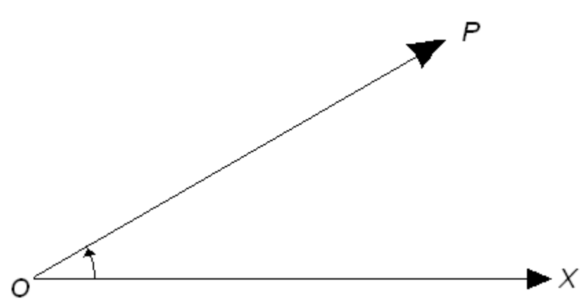

Figura 6.1: Ángulos positivos y negativos

[1]En lo sucesivo solamente nos referiremos a figuras geométricas que pertenecen a la geometria euclideana

6.2. Sistema sexagesimal

El orígen del sistema sexagesimal es muy antiguo. Los babilonios dividían la circunferencia en 360 partes iguales, y esta división llegó a la Europa Central por medio de los árabes, que la tomaron de los griegos. La unidad fundamental es el grado que es 1/360 de una circunferencia.

6.3. Sistema cíclico

El término radián apareció por primera vez en una publicación de 5 de junio de 1873 en unas preguntas de examen propuestas por James Thomson, hermano de Lord Kelvin, en el Queen's College de Belfast. James Thomson usó el término ya en 1871, mientras que en 1869 Thomas Muir de la St. Andrew's University había vacilado en el uso de rad, radial y radián. En 1874, Muir adoptó el término radián después de consensuarlo con James Thomson[2].

En el sistema cíclico la unidad fundamental es el radián, que se define como la longitud de un radio de circunferencia subtendido sobre un arco de la misma.

6.4. Sistema centesimal

El primer ejemplo de grado centesimal se halla en un manuscrito del año 1446. La subdivisión centesimal fue usada por el inglés Henry Briggs (1556–1630) en la construcción de una tabla logarítmico-trigonométrica, publicada por Henry Gellibrand (1597–1637), de la misma nacionalidad que el anterior, en su *Trigonometría britannica*.

En tiempo de la revolución francesa se intentó implantar el sistema centesimal para la medida de los ángulos, y trabajaron en ello los grandes matemáticos franceses Joseph Louis Lagrange (1736–1813), Adrien Marie Legendre (1875–1833) y Francois Callet (1744–1798), quien publicó unas tablas para ambos sistemas de subdivisión.

Aunque la tentativa no tuvo la suerte que merecía, muchos instrumentos topográficos y náuticos tienen graduación centesimal.

En este sistema, el ángulo recto está dividido en 100 partes iguales, llamadas grados centesimales. Cada grado constituye la unidad centesimal y se divide en 100 minutos, y cada minuto en 100 segundos.

Para diferenciar los grados del sistema centesimal de los del sistema sexagesimal, se escribe la letra G a manera de exponente y las comillas de minutos y segundos se escriben dirigidas a la derecha, así, 47 grados, 34 minutos y 25 segundos, se escriben

$$47^G\, 34\text{`}25\text{``}$$

Ventajas de este sistema. Este sistema, llamado también francés, porque fué propuesto por matemáticos franceses en tiempo de la Revolución tiene la ventaja de que los minutos se

[2]El comentario de Thomas Muir es el siguiente: From a recently published part of the "New English Dictionary" it is to be inferred that the first authority for the use of the word "radian" was the "Treatise on Natural Philosophy" of Thomson and Tait, the date given being 1879 –that is to say, the date of the new edition of part I. of vol. I. As the word has at least ten years of previous history, it may be desirable to put on record a few additional facts in regard to it. My own first use of it was in class–teaching in the College Hall at St. Andrews in 1869, and I possess a note–book, belonging to one of my students of that year, in which the word is used. The introduction of it was almost simultaneous with my proposal of the word "therm" in connection with the measurement of heat.
Consulte el texto en la dirección electrónica: http://www.nature.com/nature/journal/v83/n2110/abs/083156a0.html

expresan como decimales del grado, y los segundos como decimales del minuto. Según este sistema, el ángulo $47^G\,25`37``$, se puede escribir: $47^G\,25.37`$ o mejor: 47.2537^G.

Conversión de medidas entre los diferentes sistemas. Estableceremos la conversión entre los tres sistemas de medición de ángulos, que son:

- Entre grados sexagesimales y radianes. Por la definición de radián, tenemos que $180° = \pi$ rad.
- Entre grados sexagesimales y centesimales. Puesto que 90 grados del sistema sexagesimal están expresados por 100 del sistema centesimal, tenemos $9° = 10^G$.
- Entre grados centesimales y radianes. Al combinar las dos fórmulas anteriores, llegamos a esta, que es π rad $= 200^G$.

EJEMPLO 6.1. *Convertir los ángulos siguientes.*

$1).\ 30°,\quad 2).\ 75°,\quad 3).\ \frac{\pi}{2}\ y\ 4).\ \frac{\pi}{3}$

Solución. Haciendo uso de la fórmula anterior, tenemos

1. Si $180° = \pi$, $30° =?$, por regla de tres, tenemos $\frac{(30°)(\pi)}{180°} = \frac{\pi}{6}$.
2. Si $180° = \pi$, $75° =?$, por regla de tres, tenemos $\frac{(75°)(\pi)}{180°} = \frac{5\pi}{12}$.
3. Si $180° = \pi$, $\frac{\pi}{2} =?$, por regla de tres, tenemos $\frac{(\frac{\pi}{2})(180°)}{\pi} = 90°$.
4. Si $180° = \pi$, $\frac{\pi}{3} =?$, por regla de tres, tenemos $\frac{(\frac{\pi}{3})(180°)}{\pi} = 60°$.

$\blacksquare$

Ejercicios.

1. Expresar en radianes y grados centesimales cada uno de los ángulos siguientes:
   a) $30°$
   b) $135°$
   c) $25°30'$
   d) $42°24'35''$
2. Expresar en grados minutos y segundos cada uno de los ángulos siguientes:
   a) $\frac{\pi}{3}$ rad
   b) $\frac{5\pi}{9}$ rad
   c) $\frac{2}{5}$ rad
   d) $\frac{4}{3}$ rad
3. Una rueda gira a razón de 48 rpm (revoluciones por minuto o rev/min). Expresar esta velocidad angular en

   a) rev/seg
   b) rad/min
   c) rad/seg

4. El minutero de un reloj mide 12 cm. ¿Qué distancia habrá recorrido la punta del minutero durante 20 minutos?

5. Una vía férrea ha de describir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en $25°$ en un recorrido de 120 m?

6. La distancia entre dos ciudades situadas en un mismo meridiano es de 270 kilómetros. Encontrar su diferencia de latitud.

7. Determinar la velocidad de la Tierra (en mi/seg) en su recorrido alrededor del Sol. Supóngase que la órbita terrestre es una circunferencia de $93'000,000$ de millas de radio, y que un año es 365 dias.

8. Se observa que una granada explota a 200 yardas a la izquierda del blanco. ¿Qué corrección angular debe hacerse si el blanco se encuentra a una distancia de

   a) 5000 yardas,
   b) 7500 yardas?

Capítulo 7

Definición de las funciones trigonométricas

El estudio de las funciones trigonométricas se remonta a la época de Babilonia, y muchos de los fundamentos del tema fueron desarrollados por matemáticos de la antigua Grecia, de la India y estudiosos musulmanes.

El primer uso de la función seno aparece en el Sulba Sutras escrito en India desde el Siglo VIII AC hasta el Siglo VI AC. Las funciones trigonométricas fueron estudiadas luego por Hiparco de Nicea (180 - 125 AC), Aryabhata (476 - 550), Varahamihira, Brahmagupta, Muhammad ibn Musa al-Kwarizmi, Abu'l-Wafa, Omar Khayyam, Bhaskara II, Nasir al-Din Tusi, Regiomontanus (1464), Ghiyath al-Kashi y Ulug Beg (Siglo XIV), Madhava (c. 1400), Rheticus, y el alumno de éste Valentin Otho. La obra de Leonhard Euler *Introductio in analysin infinitorum (1748)* fue la que estableció el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas en Europa. definiéndolas como series infinitas presentadas en las llamadas "Fórmulas de Euler".

La noción de que debería existir alguna correspondencia estándar entre la longitud de los lados de un triángulo siguió rápidamente a la idea de que triángulos similares mantienen la misma proporción entre sus lados. Esto es, que para cualquier triángulo similar la relación entre la hipotenusa y otro de los lados permanece igual. Si la hipotenusa es el doble de larga, así serán los catetos. Justamente estas proporciones son las que expresan las funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas se definen sobre un triángulo rectángulo, como el que se muestra a continuación.

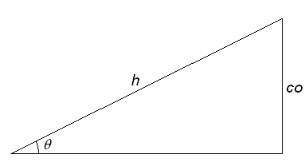

Figura 7.1: Triángulo rectángulo

7.1. Seno

La función *seno* se define en un triángulo rectángulo como la relación existente entre el ángulo θ, el cateto opuesto a dicho ángulo y la hipotenusa. En símbolos tenemos

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{co}{h}$$

7.2. Coseno

La función *coseno* se define en un triángulo rectángulo como la relación existente entre el ángulo θ, el cateto adyacente a dicho ángulo y la hipotenusa. En símbolos tenemos

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{ca}{h}$$

7.3. Tangente

La función *tangente* se define en un triángulo rectángulo como la relación existente entre el ángulo θ y los catetos opuesto y adyacente a dicho ángulo. En símbolos tenemos

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{co}{ca}$$

7.4. Cotangente

La función *cotangente* se define en un triángulo rectángulo como la relación existente entre el ángulo θ y los catetos adyacente y opuesto a dicho ángulo. En símbolos tenemos

$$\cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{ca}{co}$$

7.5. Secante

La función *secante* se define en un triángulo rectángulo como la relación existente entre el ángulo θ, la hipotenusa y el cateto adyacente a dicho ángulo. En símbolos tenemos

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{h}{ca}$$

7.6. Cosecante

La función *cosecante* se define en un triángulo rectángulo como la relación existente entre el ángulo θ, la hipotenusa y el cateto opuesto a dicho ángulo. En símbolos tenemos

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{h}{co}$$

De acuerdo a las definiciones de las funciones trigonométricas vemos que hay ciertas relaciones, por ejemplo, las funciones seno y cosecante son funciones *recíprocas*, eso es,

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \text{ y } \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

De la misma forma coseno y secante son funciones recíprocas

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \text{ y } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta},$$

y por último tangente y cotangente son funciones recíprocas también

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \text{ y } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

También, si hacemos la división de las funciones seno y coseno obtenemos la función tangente, en símbolos

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{co}{h}}{\frac{ca}{h}} = \frac{co}{ca} = \tan\theta.$$

De la misma forma, la función cotangente se obtiene al dividir el coseno entre el seno, esto es,

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Capítulo 8

Cálculo de funciones trigonométricas

8.1. Ángulos notables

Tomemos un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales de medida 1, de acuerdo al Teorema de Pitágoras, la hipotenusa de este triángulo mide $\sqrt{2}$ unidades, ver la figura (8.1) este triángulo tiene un ángulo recto y dos ángulos de 45° cada uno, entonces, las funciones

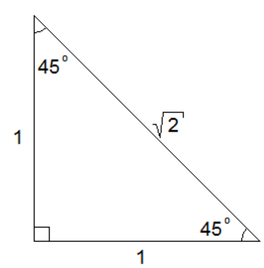

Figura 8.1: Triángulo rectángulo isósceles

trigonométricas en este triángulo serán:

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 45^\circ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 45^\circ &= 1 \\ \cot 45^\circ &= 1 \\ \sec 45^\circ &= \tfrac{\sqrt{2}}{1} \\ \csc 45^\circ &= \tfrac{\sqrt{2}}{1} \end{aligned}$$

Por otra parte, en un un triángulo equilátero[1] de lado 2 construímos una altura[2] que también es una bisectriz, por lo tanto, divide a un ángulo en 2 ángulos de 30° cada uno. Ver la figura (8.2) por el Teorema de Pitágoras, tenemos que dicha altura mide $\sqrt{3}$ unidades

[1] Recuerde que en todo triángulo euclideano (plano), la suma de sus ángulos internos es de 180°, por tanto, aquí, cada ángulo mide 60°.

[2] Una altura es la línea que se traza desde un vértice perpendicular al lado opuesto.

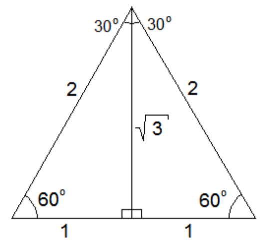

Figura 8.2: Triángulo equilátero

entonces, podemos escribir las funciones trigonométricas de 30° y 60°.

$$\begin{array}{ll}
\sin 30^\circ = \frac{1}{2} & \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\
\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} & \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\
\cot 30^\circ = \sqrt{3} & \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} & \sec 60^\circ = 2 \\
\csc 30^\circ = 2 & \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{array}$$

Podemos resumir todos los ángulos notables entre 0° y 90° en la siguiente tabla.

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	∞	0	∞	1

Se deja como ejercicio al lector construir una tabla con los ángulos notables desde 0° hasta 360°.

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\csc\theta$
$0°$						
$30°$						
$45°$						
$60°$						
$90°$						

8.2. Cálculo de funciones trigonométricas

Para encontrar los valores trigonométricos de diferentes ángulos haremos uso de la calculadora científica. La calculadora tiene tres teclas para las funciones trigonométricas, la del seno, coseno y tangente.

Las valores numéricos para las otras funciones (cotangente, secante y cosecante) se pueden calcular por medio de identidades.

8.3. Gráficas

Las gráficas de las funciones trigonométricas son:

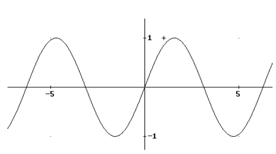

Figura 8.3: Función seno

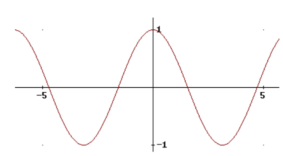

Figura 8.4: Función coseno

Como puede verse por la gráfica, donde el eje horizontal es x y el eje vertical es y, el dominio de las funciones seno y coseno es de $-\infty < x < \infty$, mientras que el contradominio es $-1 \leq y \leq 1$.

En el caso de la función tangente, el dominio es de $-\infty < x < \infty$, a excepción de los puntos $\frac{k\pi}{2}$ donde k es cualquier número impar, por otra parte, el dominio de la función cotan-

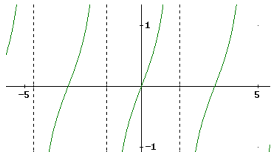

Figura 8.5: Función tangente

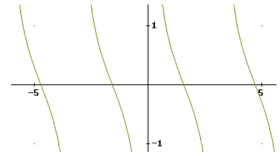

Figura 8.6: Función cotangente

gente es $-\infty < x < \infty$, a excepción de los puntos $k\pi$ donde k es cualquier número entero. El contradominio de ambas es $-\infty < y < \infty$.

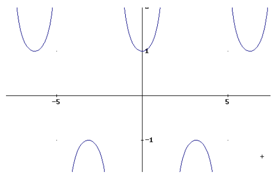

Figura 8.7: Función secante

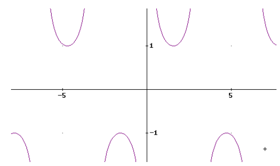

Figura 8.8: Función cosecante

Para la función secante el dominio es de $-\infty < x < \infty$, a excepción de los puntos $\frac{k\pi}{2}$ donde k es cualquier número impar y el contradominio es de $-\infty < y \leq -1$ unión con $1 \leq y < \infty$. Para la función cosecante, el dominio es de $-\infty < x < \infty$, a excepción de los puntos $k\pi$ donde k es cualquier número entero y el contradominio es de $-\infty < y \leq -1$ unión con $1 \leq y < \infty$.

Capítulo 9

Funciones trigonométricas inversas y sus gráficas

Una función trigonométrica inversa es una función que se usa para calcular el *arco* en grados o radianes. Si $x = \sin y$ la función inversa es $y = \arcsin x$, así, las funciones trigonométricas inversas son:

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ y &= \arccos x \\ y &= \arctan x \\ y &= \operatorname{arccot} x \\ y &= \operatorname{arcsec} x \\ y &= \operatorname{arccsc} x \end{aligned}$$

Las gráficas de las funciones trigonométricas son:

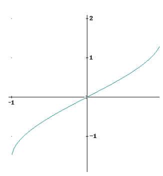

Figura 9.1: Función arcoseno

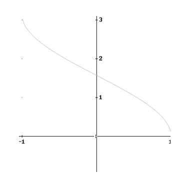

Figura 9.2: Función arcocoseno

El dominio de la función seno es de $-1 \leq x \leq 1$ y el contradominio de $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, mientras que el dominio de la función coseno es de $-1 \leq x \leq 1$ y el contradominio de $0 \leq y \leq \pi$.

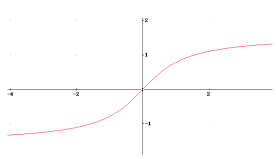

Figura 9.3: Función arcotangente

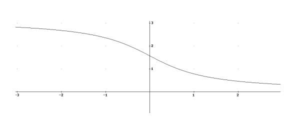

Figura 9.4: Función arcocotangente

Para las funciones tangente y cotangente, el dominio es el mismo, de $-\infty < x < \infty$, mientras que el contradominio de la tangente es de $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ y el contradominio de la cotangente es $0 \leq y \leq \pi$.

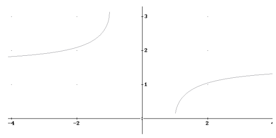

Figura 9.5: Función arcosecante

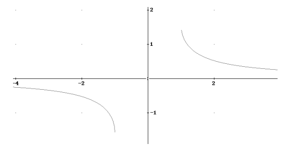

Figura 9.6: Función arcocosecante

El dominio de las funciones secante y cosecante es $x \neq 0$ mientras que el contradominio de la secante es $y \neq \frac{\pi}{2}$ y el contradominio de la cosecante es $y \neq 0$.

Capítulo 10

Ángulos de diversas magnitudes

10.1. Aplicaciones

Ejercicios.

1. Encontrar la base y la altura de un triángulo isósceles cuyo ángulo del vértice mide 65° y cuyos lados iguales miden 415 cm.

2. La distancia entre una pared de 15 pies de altura y una casa es de 10 pies. ¿Cuál ha de ser la menor longitud de una escalera de mano que permita llegar al extremo superior de la pared y a una ventana de la casa situada a 20.5 pies de altura?

3. Un bote de motor navega durante 3 horas a razón de 20 millas por hora en dirección N 40° E. ¿Qué distancia hacia el norte y que distancia hacia el este ha navegado?

4. Un árbol es trozado por un rayo, si la copa del árbol está a una distancia de 1.5 m del tronco y el ángulo entre ambos troncos es de 65°, determine la altura del árbol.

Capítulo 11

Identidades trigonométricas

Cuando una ecuación, es verdadera sin importar el valor o valores que pueda tomar la incógnita se llama *identidad*. Las primeras identidades trigonométricas que hemos visto son, por ejemplo, $\sin\theta \cdot \csc\theta \equiv 1$, $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$

En ocasiones, al resolver un problema, es necesario convertir una expresión trigonométrica a otra más sencilla, o simplemente, diferente según nuestra conveniencia.

11.1. Identidades recíprocas

1. $\sin\theta \cdot \csc\theta \equiv 1$
2. $\cos\theta \cdot \sec\theta \equiv 1$
3. $\tan\theta \cdot \cot\theta \equiv 1$

11.2. Identidades pitagóricas

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1$
2. $\tan^2\theta + 1 \equiv \sec^2\theta$
3. $1 + \cot^2\theta \equiv \csc^2\theta$

EJEMPLO 11.1. *Verifique la identidad*

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} \equiv 2$$

Solución. Realizando la operación de resta, tenemos

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} \equiv \frac{\sin 3x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 3x}{\sin x \cdot \cos x}$$

usando la identidad $\sin(A - B) \equiv \sin A \cos B - \sin B \cos A$, para reducir el numerador y haciendo $A = 3x$, $B = x$, tenemos

$$\frac{\sin 2x}{\sin x \cdot \cos x} \equiv 2$$

y usando ahora la susutitución $\sin 2x \equiv 2\sin x \cos x$ llegamos a

$$\frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} \equiv 2$$

así que finalmente,

$$2 \equiv 2.$$

■

Ejercicios.

1. Verifica las siguientes identidades.

   a) $\sec^2\theta \csc^2\theta = \sec^2\theta + \csc^2\theta$

   b) $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

   c) $2\csc x = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

   d) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

   e) $\dfrac{\sec A - \csc A}{\sec A + \csc A} = \dfrac{\tan A - 1}{\tan A + 1}$

   f) $\dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \dfrac{\sec x}{1+\cos x}$

   g) $\dfrac{\cos A \cot A - \sin A \tan A}{\csc A - \sec A} = 1 + \sin A \cos A$

   h) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}$

   i) $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

Capítulo 12

Ecuaciones trigonométricas

En ocasiones hay problemas que conducen a ecuaciones trigonométricas, y a diferencia de las identidades, aquí, solamente hay una cantidad finita de valores para los cuales es cierta la ecuación.

EJEMPLO 12.1. *Resolver la ecuación* $2\sin x - 1 = 0$.

Solución. Despejamos el menos 1, y tenemos

$$2\sin x = 1$$

y el 2 que está multiplicando del otro lado de la ecuación estará dividiendo, entonces

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

y usando la inversa del seno, tenemos

$$x = \arcsin\frac{1}{2}$$

por lo tanto, la solución es

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ y } x = \frac{5\pi}{6}$$

■

Ejercicios. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonoméricas.

1. $\sin x\cos x = 0$
2. $(\tan x - 1)(4\sin^2 x - 3) = 0$
3. $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$
4. $3\cos^2 x = \sin^2 x$
5. $2\sin x - \csc x = 1$
6. $2\sec x = \tan x + \cot x$
7. $\tan x + 3\cot x = 4$

8. $\csc x + \cot x = \sqrt{3}$
9. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$
10. $2\cos x = 1 - \sin x$
11. $\sin 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
12. $\cos \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$
13. $\sin 2x + \cos x = 0$
14. $2\cos^2 \frac{1}{2}x = \cos^2 x$
15. $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$
16. $\tan 2x + 2\sin x = 0$
17. $\sin 2x = \cos 2x$
18. $\sin 2x = \cos 4x$
19. $\sin 3x = \cos 2x$
20. $\tan 4x = \cot 6x$
21. $\sin 5x - \sin 3x - \sin x = 0$
22. Encuentre $r > 0$ y $\theta \in [0,\, 2\pi]$ si: $r\sin\theta = 2$, $r\cos\theta = 3$
23. Encuentre $r > 0$ y $\theta \in [0,\, 2\pi]$ si: $r\sin\theta = 3$, $r = 4(1+\sin\theta)$
24. Encuentre $x \geq 0$ y $y < 2\pi$ si: $\sin x + \sin y = 1.2$, $\cos x + \cos y = 1.5$
25. $\arccos 2x = \arcsin x$
26. $\arccos(2x^2 - 1) = 2\arccos \frac{1}{2}$
27. $\arccos 2x - \arccos x = \frac{\pi}{3}$
28. $\arcsin 2x = \frac{1}{4}\pi - \arcsin x$
29. $\arctan x + \arctan(1-x) = \arctan(\frac{4}{3})$

Para reflexionar:

Sir Ernest Rutherford, presidente de la Sociedad Real Británica y Premio Nobel de Química en 1908, contaba la siguiente anécdota:

“Hace algún tiempo, recibí la llamada de un colega. Estaba a punto de poner un cero a un estudiante por la respuesta que había dado en un problema de física, pese a que este afirmaba rotundamente que su respuesta era absolutamente acertada. Profesores y estudiantes acordaron pedir arbitraje de alguien imparcial y fui elegido yo. Leí la pregunta del examen y decía: Demuestre cómo es posible determinar la altura de un edificio con la ayuda de un barómetro. El estudiante había respondido: llevo el barómetro a la azotea del edificio y le ató una cuerda muy larga. Lo descuelgo hasta la base del edificio, marco y mido. La longitud de la cuerda es igual a la longitud del edificio.

Realmente, el estudiante había planteado un serio problema con la resolución del ejercicio, porque había respondido a la pregunta correcta y completamente. Por otro lado, si se le concedía la máxima puntuación, podría alterar el promedio de su año de estudio, obtener una nota mas alta y así certificar su alto nivel en física; pero la respuesta no confirmaba que el estudiante tuviera ese nivel. Sugerí que se le diera al alumno otra oportunidad. Le concedí seis minutos para que me respondiera la misma pregunta pero esta vez con la advertencia de que en la respuesta debía demostrar sus conocimientos de física. Habían pasado cinco minutos y el estudiante no había escrito nada. Le pregunte si deseaba marcharse, pero me contesto que tenía muchas respuestas al problema. Su dificultad era elegir la mejor de todas. Me excusé por interrumpirle y le rogué que continuara. En el minuto que le quedaba escribió la siguiente respuesta: tomo el barómetro y lo lanzo al suelo desde la azotea del edificio, calculo el tiempo de caída con un cronómetro. Después se aplica la fórmula altura $= 0.5$ por g por t^2. Y así obtenemos la altura del edificio. En este punto le pregunte a mi colega si el estudiante se podía retirar. Le dió la nota más alta. Tras abandonar el despacho, me reencontré con el estudiante y le pedí que me contara sus otras respuestas a la pregunta. Bueno, respondió, hay muchas maneras, por ejemplo, tomas el barómetro en un día soleado y mides la altura del barómetro y la longitud de su sombra. Si medimos a continuación la longitud de la sombra del Edificio y aplicamos una simple proporción, obtendremos también la altura del edificio. Perfecto, le dije, ¿y de otra manera? Si, contestó, éste es un procedimiento muy básico para medir un edificio, pero también sirve. En este método, tomas el barómetro y te sitúas en las escaleras del edificio en la planta baja. Según subes las escaleras, vas marcando la altura del barómetro y cuentas el número de marcas hasta la azotea. Multiplicas al final la altura del barómetro por el número de marcas que has hecho y ya tienes la altura. Este es un método muy directo. Por supuesto, si lo que quiere es un procedimiento más sofisticado, puede atar el barómetro a una cuerda y moverlo como si fuera un péndulo. Si calculamos que cuando el barómetro está a la altura de la azotea la gravedad es cero y si tenemos en cuenta la medida de la aceleración de la gravedad al descender el barómetro en trayectoria circular al pasar por la perpendicular del edificio, de la diferencia de estos valores, y aplicando una sencilla fórmula trigonométrica, podríamos calcular, sin duda, la altura del edificio. En este mismo estilo de sistema, atas el barómetro a una cuerda y lo descuelgas desde la azotea a la calle. Usándolo como un péndulo puedes calcular la altura midiendo su período de precesión. En fin, concluyó, existen otras muchas maneras. Probablemente, la mejor sea tomar el barómetro y golpear con el la puerta de la casa del portero. Cuando abra, decirle: “Señor portero, aquí tengo un bonito barómetro. Si usted me dice la altura de este edificio, se lo regalo”.

En este momento de la conversación, le pregunte si no conocía la respuesta convencional al problema (la diferencia de presión marcada por un barómetro en dos lugares diferentes nos proporciona la diferencia de altura entre ambos lugares) evidentemente, dijo que la conocía, pero que durante sus estudios, sus profesores habían intentado enseñarle a pensar.

El estudiante se llamaba Niels Bohr, físico danés, premio Nobel de física en 1922, más conocido por ser el primero en proponer el modelo de átomo con protones y neutrones y los electrones que lo rodeaban. Fue fundamentalmente un innovador de la teoría cuántica. Al margen del personaje, lo divertido y curioso de la anécdota, lo esencial de esta historia es que **le habían enseñado a pensar**. Por cierto, para los escépticos, esta historia es absolutamente verídica Aprendamos a pensar, hay mil soluciones para un mismo problema, pero lo realmente interesante, lo auténticamente genial es elegir la solución más practica y rápida, de forma que podamos acabar con el problema de raíz… y dedicarnos a solucionar **otros** problemas”.

Saludos.

Departamento de Ciencias Básicas.